

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Professor
Carlos André

Matemático
Economista Especialista
(Pós-graduado em Gestão Financeira)

barbosadejesu@hotmail.com

SUMÁRIO

MATEMÁTICA FINANCEIRA

1. Porcentagem	.04
1.1. Conceito de Porcentagem	.04
1.2. Cálculo de Porcentagem	.04
Problemas Propostos com Gabarito	.05
2. Juros Simples	.05
2.1. Conceito de Juros... ..	.05
2.2. Juro Comercial.. ..	.05
2.3. Juro Simples Exato	.06
2.4. taxa Percentual.. ..	.06
2.5. Taxa Unitária.. ..	.07
2.6. Taxa Unitária e Percentual	.07
2.7. Taxa Nominal	.07
2.8. Taxas Proporcionais	.08
2.8.1. Taxa Proporcional.. ..	.08
2.9. Taxas Equivalentes.. ..	.08
2.9.1. Taxas Equivalentes	.08
2.10. Taxas Efetivas... ..	.09
2.11. Capital, Taxa e Prazo Médio.	.10
Problemas Propostos com Gabarito	.11
2.12. Cálculo do Juro	.12
2.13. Cálculo do Montante	.13
2.14. Valor Atual (VA)	.13
2.15. Valor Presente (VP) ou Valor Atual Racional (VAR)	.13
2.16. Valor Futuro (VF)	.14
2.17. Valor Nominal (VN)	.14
2.18. Desconto Racional (Por Dentro) e Valor Atual Racional (VAR)	.14
2.19. Desconto Comercial (Por Fora) e Valor Atual Comercial (VAC)	.15
2.20. Desconto Bancário e Valor Atual Bancário (VAB)	.15
2.21. Taxa Efetiva e Taxa Aparente	.16
2.21.1. Taxa Efetiva em Relação ao Desconto Comercial (Por Fora)	.16
2.21.2. Taxa Efetiva em Relação ao Desconto Bancário	.17
2.22. Relação Entre Desconto Comercial e Desconto Racional	.17
2.23. Equivalência de Capitais	.18
Problemas Propostos com Gabarito	.19
3. Juros Compostos	.20
3.1. Conceito de Juros Compostos	.20
3.2. Taxas Proporcionais	.21
3.3. Taxas Equivalentes	.21
3.4. Taxas Equivalentes	.21
3.5. Taxa Efetiva ou Taxa Real	.22
3.6. Taxa Nominal	.22
3.6.1. Transformação da Taxa Nominal em Taxa Efetiva.. ..	.23

Problemas Propostos com Gabarito	23
3.7. Convenção Exponencial e Linear.. ..	24
3.8. Cálculo do Montante e do Juro.. ..	24
Problemas Propostos com Gabarito	26
3.9. Desconto Comercial e Valor Atual Comercial (VAC).. ..	27
3.10. Desconto Racional e Valor Atual Racional (VAR).. ..	28
Problemas Propostos com Gabarito	28
3.11. Equivalência de Capitais.. ..	29
3.11.1. Equivalência com Desconto Racional.. ..	29
3.11.2. Equivalência com Desconto Comercial.. ..	31
3.11.3. Ganho Real e Ganho Nominal.. ..	32
Problemas Propostos com Gabarito	33
4. Anuidades (Rendas Certas).. ..	33
4.1. Rendas Certas.. ..	34
4.1.2. Rendas Certas Postecipadas.. ..	34
4.1.2. Montante em Rendas Certas Postecipadas.. ..	35
Problemas Propostos com Gabarito	36
4.1.4. Rendas Certas Antecipadas.. ..	37
4.1.2. Montante em Rendas Certas Antecipadas.. ..	38
Problemas Propostos com Gabarito	40
Questões dos Últimos Concursos Públicos com Gabarito.. ..	40

1. Porcentagem

1.1. Conceito: A expressão *por cento*, indicada pelo símbolo %, significa centésimos; assim, 25% é simplesmente outra maneira de exprimir 25/100 ou 1/4

O símbolo % significa divisão por cem logo $25\% = 25 : 100$, ou seja, toda percentagem é uma fração, então para se saber uma percentagem de uma certa quantia, basta multiplicar a fração que representa a percentagem pela quantia.

Exemplo: 20% de 230 $\rightarrow \frac{20}{100} \times 230 = 46$

1.2. Cálculo da Porcentagem: O principal, a percentagem e a taxa são os elementos do cálculo percentual

Para se saber quanto por cento uma quantia menor representa de outra maior, basta dividir a menor pela maior e multiplicar o resultado por cem.

Exemplo: Quanto por cento 34 representa de 680 ?

$$\frac{34}{680} \times 100 = 5\%$$

Através da regra de três simples podemos encontrar tanto o valor de uma percentagem, como também a percentagem que um valor menor representa de um maior.

Exemplo: a) Quanto é 20% de 230 ?

Valor	%	$100x = 230 \cdot 20$
x	20	
230	100	$x = \frac{230 \cdot 20}{100} = 46$

b) Quanto por cento 34 representa de 680:

Valor	%	$680 \cdot x = 3400$
680	100	
34	x	$x = \frac{3400}{680}$
		$x = 5\%$

Problemas Propostos

- 1) Um objeto sofreu um desconto de 8% e custou R\$ 460,00. Quanto você iria pagar por esse objeto se ele não sofresse o desconto ? (R\$ 500,00)

- 2) Numa indústria, 15% dos operários são solteiros. Se a indústria possui 700 operários, quantos são os casados ? (R = 595)

- 3) De 400 operários, 120 faltaram ao serviço. Qual a taxa de porcentagem dos operários ausentes ? (R = 30%)

2. Juros Simples

2.1. Juro: É a remuneração, a qualquer título, atribuída ao capital.

É uma espécie de recompensa pela disponibilidade imediata de uma certa quantia. Assim se alguém empresta uma quantia x comprometendo – se a pagar $x + y$, isso significa que y é a recompensa pela disponibilidade imediata de x , quantia esta referente ao juro.

Quando uma pessoa deposita uma certa quantia na poupança em um certo banco, ela na realidade está emprestando essa quantia ao banco, que a usará como bem entender, e por isso o banco se compromete a pagar a essa pessoa uma certa quantia como recompensa, quantia essa que se refere ao juro, que é representada em forma de taxa (taxa de poupança).

2.2. Juro Comercial (Juro Ordinário): Ocorrem quando o prazo de 1 ano for de 360 dias.

É aquele que se obtém quando consideramos o ano comercial (360 dias), para se achar a taxa diária, pois geralmente estará expressa em ano, e o período (n) expresso em dias:

$$J_C = \frac{C.i.n}{360}$$

Exemplo: Qual é o juro comercial (ordinário) obtido por um capital de R\$ 10.000,00 que é aplicado por 45 dias a uma taxa de 72% ao ano?

Resolução:

$$J_C = \frac{10000 \times 0,72 \times 45}{360} \longrightarrow 900,00$$

2.3. Juro Simples Exato: Ocorre quando o prazo de 1 ano for de 365 dias (ou 366 dias, sendo ano bissexto).

É aquele que se obtém quando consideramos o ano civil (365 dias), para se achar a taxa diária, pois geralmente estará expressa em ano, e o período (n) expresso em dias:

$$J_E = \frac{C.i.n}{365}$$

Exemplo: Qual é o juro exato obtido por um capital de R\$ 10.000,00 que é aplicado por 45 dias a uma taxa de 72% ao ano?

Solução:

$$J_E = \frac{10000 \times 0,72 \times 45}{365} \longrightarrow 887,67$$

2.4. Taxa Percentual: É a representação de uma porcentagem utilizando o símbolo %

Exemplo: (7%, 5%, 15%, etc.) → Essa forma de representação é denominada de taxa percentual.

Na fórmula: $J = \frac{C.i.n}{100}$ a taxa de juros é percentual.

2.5. Taxa Unitária: É a representação de uma porcentagem através de um número decimal.

Exemplo: (7% = 0,07, 5% = 0,05, 15% = 0,15) → Essa forma de representação é denominada de taxa unitária.

$$\text{Taxa Unitária} = \frac{\text{Taxa Percentual}}{100} \text{ ou } i\% = 100 \cdot i$$

Na fórmula: $J = C \cdot i \cdot n$ a taxa de juros é unitária

2.6. Taxa Unitária e Taxa Percentual: Como vimos o símbolo % significa divisão por cem, logo 25% = 25 : 100. Isso nos sugere duas representações possíveis de taxas: uma taxa na forma percentual e outra na forma unitária.

- a) Forma percentual: É a forma representada através do símbolo %.
Exemplo: 25 %
- b) Forma unitária : É a forma representada após a divisão por 100.
Exemplo: 25% fica na forma unitária = 0,25

2.7. Taxa Nominal: É aquela registrada no título de crédito

Exemplo: Em determinada casa comercial são concedidos descontos de 10% no preço das mercadorias, para as vendas a vista. Esta mesma casa cobra 24% de juros para as vendas com prazo de pagamento de 60 dias. Nessas condições, qual é a taxa mensal nominal de juros simples?

- a) 12,00% b) 18,89% c) 24,00% d) 27,00% e) 37,78%

Solução: Preço a Vista (P_{av}) = 100

Desconto (Desc) = $0,10 \times 100 = 10$

Preço com Desconto (P_{desc}) = $100 - 10$

Prazo de 60 dias = $100 + 0,24 \times 100 = 100 + 24 = 124$

Logo.....

$$J_n = 124 - 100 = 24$$

$$i_n = \frac{24}{100} = 0,24 \text{ (60 dias)}$$

$$i_n = \frac{24}{2} = 0,12 = 12 \% \text{ ao mês (Letra A)}$$

2.8. Taxas Proporcionais: São as taxas na qual existe uma proporção entre as taxas e seus períodos respectivos

Exemplo: 24% ao ano e 6% ao trimestre
5% ao mês e 20% ao quadrimestre

2.8.1. Taxa Proporcional:

É quando duas taxas e seus respectivos períodos formam uma proporção:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Exemplo: Verificar se as taxas de 5% ao trimestre e de 20% ao ano são proporcionais.

Resolução : $i_1 = 0,05$ a.t. $n_1 = 3$ meses
 $i_2 = 0,20$ a.a. $n_2 = 12$ meses

substituindo-se os valores:

$$\frac{0,05}{0,20} = \frac{3}{12} \rightarrow \text{o que é verdade, logo elas são proporcionais.}$$

2.9. Taxas Equivalentes: São aquelas aplicadas a um mesmo capital em intervalos de tempo iguais e que produzem o mesmo juro.

Exemplo: 3% ao trimestre e 1% ao mês

2.9.1. Taxa Equivalente:

É quando um mesmo capital aplicado às duas taxas com capitalizações diferentes, por um mesmo período de tempo produzem os mesmos juros:

$$\cancel{C} \cdot i_1 \cdot n_1 = \cancel{C} \cdot i_2 \cdot n_2 \rightarrow i_1 \cdot n_1 = i_2 \cdot n_2$$

Se caso não levarmos em consideração o período de tempo e sim o período de capitalização em uma mesma unidade de tempo teremos:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Então nesse caso, no juros simples a taxa equivalente é a mesma proporcional.

Exemplo: Seja um capital de R\$ 10000,00, que pode ser aplicado alternativamente à taxa de 2% ao mês ou de 24% ao ano. Supondo um prazo de aplicação de dois anos, verificar se as taxas são equivalentes.

$I_1 = 0,02$ $n_1 = 1$
 $I_2 = 0,24$ $n_2 = 12$

Como $i_1 \cdot n_1 = i_2 \cdot n_2$
 $0,02 \cdot 24 = 0,48$
 $0,48 = 0,48$ o que é verdadeiro
logo são equivalentes

Ou, pela Segunda fórmula teremos

substituindo-se os valores:

$$\frac{0,02}{0,24} = \frac{1}{12} \longrightarrow 0,24 = 0,24$$

o que é verdade, logo elas são equivalentes.

OBSERVAÇÃO:
NO REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES
TAXAS PROPORCIONAIS = TAXAS EQUIVALENTES

2.10. Taxas Efetiva: São aquelas recebidas ao final do período de aplicação

Exemplo: Em determinada casa comercial são concedidos descontos de 10% no preço das mercadorias, para as vendas a vista. Esta mesma casa cobra 24% de juros para as vendas com prazo de pagamento de 60 dias. Nessas condições, qual é a taxa mensal efetiva de juros simples?

- a) 12,00%
- b) 18,89%**
- c) 24,00%
- d) 27,00%
- e) 37,78%

Solução:

Preço a Vista (Pav) = 100

Desconto (Desc) = 0,10 x 100 = 10

Preço com Desconto (Pdesc) = 100 – 10

Prazo de 60 dias = 100 + 0,24 x 100 = 100 + 24 = 124

Logo.....

$$Je = 124 - 90 = 34$$

$$i_e = \frac{34}{90} = 0,3778 \text{ (60 dias)}$$

$$i_e = \frac{0,3778}{2} = 0,1889 = 18,89 \% \text{ ao mês (Letra B)}$$

2.11. Capital, Taxa e Prazo Médio:

É dado pela razão entre o somatório do produto : capital . taxa . tempo (C.i.n), podendo faltar um desses termos, e o somatório do produto com exclusão daquele termo que se deseja achar a média.

$$\frac{\sum C.i.n}{\sum C.i.n}$$

Se você usar o $\sum(i.n)$ embaixo (no denominador) estará achando o capital médio. Se você usar o $\sum(c.n)$ no denominador estará achando a taxa média. Se você usar o $\sum(C.i)$ no denominador estará achando o prazo médio.

Exemplo: Um capital de R\$ 3.000,00 foi aplicado à uma taxa de 5% ao mês por 3 meses, outro de R\$ 5.000,00 à taxa de 10% ao mês por 5 meses e um outro de R\$ 6.000,00 à uma taxa de 8% ao mês por 4 meses. Pergunta – se:

a) Qual o capital médio?:

$$\frac{\sum C.i.n}{\sum C.i.n} = \frac{3000 \times 5 \times 3 + 5000 \times 10 \times 5 + 6000 \times 8 \times 4}{5 \times 3 + 10 \times 5 + 8 \times 4}$$

$$\frac{487000}{97} \rightarrow \text{R\$ 5020,62}$$

b) Qual a taxa média?:

$$\frac{\sum C.i.n}{\sum C.i.n} = \frac{3000 \times 5 \times 3 + 5000 \times 10 \times 5 + 6000 \times 8 \times 4}{3000 \times 3 + 5000 \times 5 + 6000 \times 4}$$

$$\frac{487000}{58000} = 8,4\%$$

c) Qual o prazo médio?:

$$\frac{\sum C.i.n}{\sum C.i.n} = \frac{3000 \times 5 \times 3 + 5000 \times 10 \times 5 + 6000 \times 8 \times 4}{3000 \times 5 + 5000 \times 10 + 6000 \times 8}$$

$$\frac{487000}{89000} = 5,47 \text{ meses}$$

Problemas Propostos

- 1) Calcular os juros simples de um capital de R\$ 2.000,00, à taxa de 36% aa, durante 9 meses.

$$R = \text{R\$ } 540,00$$

- 2) Calcular a taxa de juros trimestral proporcional à taxa de 24%a.a.

$$R = 6\% \text{ a. t.}$$

- 3) Calcular a taxa de juros anual proporcional à taxa de 3%ao mês

$$R = 36\% \text{ a.a.}$$

- 4) Calcular os juros simples de um capital de R\$ 1.000,00, à taxa de 38% a.a., durante 2 anos e 8 meses.

$$R = \text{R\$ } 1.013,33$$

- 5) Que montante receberá um aplicador que investiu R\$ 10.000,00 à taxa de 42% a.a. durante 2 anos e 3 meses ?

$$R = \text{R\$ } 19.450,00$$

- 6) Uma pessoa investiu R\$ 1.000,00 durante 1 ano e 9 meses, e resgatou R\$ 1.350,00. Qual a taxa de juros simples aplicada na operação ?

$$R = 1,67\% \text{ a.m.}$$

- 7) Quanto tempo deve ficar aplicado um capital de R\$ 1.200,00 à taxa de 22%a.a., para gerar um montante de R\$ 2.366,00 ?

$$R = 4 \text{ anos e } 5 \text{ meses}$$

- 8) Uma loja vende um objeto por R\$ 1.500,00 à vista. A prazo vende por R\$ 1.800,00, sendo R\$ 200,00 de entrada e o restante após 1 ano. Qual é a taxa de juros anual cobrada ?

$$R = 23,07\% \text{ a.a.}$$

- 9) Quanto tempo deve ficar aplicado um capital para que o juro seja igual a cinco vezes o capital, se a taxa de juros for de 25% a.a.

$$R = 20 \text{ anos}$$

10) Em quanto tempo o montante produzido por um capital de R\$ 1.920,00 aplicado a 25% a.a. se iguala ao montante de um capital de R\$ 2.400,00 aplicado a 15% a.a. ?

R = 4 anos

11) A quantia de R\$ 1.500,00 foi aplicada à taxa de juros simples de 42% a.a. pelo prazo de 100 dias. Qual será o juros comercial e exato desta operação ?

R = Je = 172,60 e Jc = 175,00

12) José investiu os capitais de R\$ 10.560,00; R\$ 7.521,00; R\$ 15.605,00 durante 1 mês, às taxas de 5%, 6%, 3,5%, respectivamente. Qual a taxa média do investimento ?

R = 4,53%

2.12. Cálculo do Juro:

O Cálculo do juro é o cálculo de uma percentagem vezes o número de capitalizações que o período indica.

Exemplo: Calcular os juros produzidos por um capital de R\$ 2000,00 aplicado a taxa de 12% ao mês, durante 6 meses.

Resposta: $\frac{12}{100} \times 2000 \times 6 \longrightarrow 1440$

cálculo da percentagem período de capitalizações

Portanto podemos escrever uma fórmula para se calcular os juros produzidos por um certo capital em função da taxa e do tempo:

$$\text{Juros} = C \cdot i \cdot n$$

Onde :
C = capital
I = taxa (Geralmente na forma unitária)
n = número de capitalizações

Assim no exemplo anterior teremos:

$$\text{Juros} = 2000 \cdot 0,12 \cdot 6$$

$$\text{Juros} = 240 \cdot 6$$

$$\text{Juros} = 1440$$

Ao se usar a fórmula devemos sempre ter o cuidado de verificar se a unidade de tempo da taxa é a mesma unidade de tempo do período de aplicação, caso não o seja devemos fazer as transformações necessárias.

No juro simples somente o capital inicial sofre capitalização, assim se aplicarmos R\$ 100,00 à 10% ao mês, teremos:

- No final do primeiro mês R\$ 100,00 + R\$ 10,00 = **R\$ 110,00**
- No final do segundo mês R\$ 100,00 + R\$ 10,00 + R\$ 10,00 = **R\$ 120,00**

E assim por diante.

2.13. Cálculo do Montante:

Quando se empresta um capital por um certo período de tempo, comprometendo-se no final do período a devolver o capital acrescido dos juros, estamos devolvendo o montante, que nada mais é do que o capital mais os juros.

Assim temos :

$$M = C + \text{Juros} \quad (\text{mas como Juros} = C.i.n, \text{ fazendo a substituição teremos})$$

$$M = C + C.i.n \quad (\text{colocando } C \text{ em evidência teremos})$$

$$M = C.(1 + i.n)$$

Exemplo: Calcular o montante produzido por um capital de R\$ 2000,00 aplicado a taxa de 12% ao mês, durante 6 meses.

$$M = 2000 . (1 + 0,12 . 6)$$

$$M = 3440$$

2.14. Valor Atual:

É quanto vale o documento em uma certa data antes do seu vencimento. Para se achar o valor atual devemos aplicar um desconto, pois se resgatarmos o documento antes da data de seu vencimento, ele terá um valor menor que aquele da data de seu vencimento (valor nominal). Logo Valor Atual é igual ao valor nominal menos o desconto.

O desconto que devemos aplicar pode ser desconto racional, desconto comercial e ainda desconto bancário, assim se aplicarmos o desconto racional obteremos valor atual racional, se aplicarmos o desconto comercial obteremos valor atual comercial e se aplicarmos o desconto bancário obteremos valor atual bancário.

Veja os exemplos nos descontos a seguir.

2.15. Valor Presente ou Valor Atual Racional (VP):

É o valor do título na presente data.

$$VF = VP . (1 + i . n) \Rightarrow \frac{VF}{(1 + i \times n)} = VP \quad \text{portanto } VP = \frac{VF}{(1 + i \times n)}$$

O valor presente também é conhecido como valor atual racional pois como vimos acima ele deriva de transformações matemáticas e não de convenções.

VF = Valor Futuro

VP = Valor Presente = Valor Atual Racional

2.16. Valor Futuro (VF):

É o valor do documento em qualquer data posterior à presente data.

$$VF = VP \cdot (1 + i \cdot n)$$

O valor futuro também é conhecido como montante, considerando o valor presente como o capital aplicado, é conhecido também como valor nominal, caso o valor futuro seja igual aquele da data de vencimento do documento.

VF = Valor Futuro = Montante = Valor Nominal

VP = Valor Presente

2.17. Valor Nominal (VN):

É quanto vale o documento na data marcada para seu vencimento.

Exemplo : Uma pessoa aplicou hoje uma quantia de R\$ 10.000,00 em uma letra de câmbio, e vai resgatá-la daqui a 6 meses com valor de R\$ 12.000,00, esse valor expresso em sua face, é o valor nominal.

Logo: Valor Nominal = R\$ 12.000,00

2.18. Desconto Racional (Por Dentro) e Valor Atual Racional:

É a diferença entre valor nominal e valor presente veja:

$$Dr = N - \frac{N}{(1 + i \cdot n)} \quad \xrightarrow{\text{Mesmo que VP}} \quad \frac{N \cdot i \cdot n}{(1 + i \cdot n)}$$

Valor Nominal = N = Valor Futuro

Exemplo: Uma pessoa pretende resgatar um título de R\$ 5000, quatro meses antes da data de vencimento. Sabendo que a taxa de juros de desconto racional é de 48%aa, qual o valor do desconto racional ? e qual o valor atual racional?

$$Dr = \frac{N \cdot i \cdot n}{(1 + i \cdot n)} \rightarrow \frac{5000 \cdot \overset{\text{Taxa ao mês}}{0,04} \cdot 4}{(1 + 0,04 \cdot 4)} \rightarrow \frac{800}{1,16} \rightarrow 689,65$$

O Valor Atual Racional : É o valor nominal menos o desconto racional = $5000 - 689,65$
 Logo Valor Atual Racional = **4310,35**

Pode ser calculado ainda por : $VP = \frac{VF}{(1 + i \cdot n)}$ onde $VP = \text{Valor Atual Racional}$
 $VF = N = \text{Valor Nominal}$
 Logo Valor Atual Racional = $\frac{5000}{(1 + 0,04 \cdot 4)} \rightarrow \frac{5000}{1,16} \rightarrow \mathbf{4310,34}$

2.19. Desconto Comercial (Por Fora) e Valor Atual Comercial:

É aquele que se obtém pelo cálculo do juro simples tomando como valor-base de aplicação o valor nominal veja:

$$D_c = \overset{\text{valor de aplicação}}{N} \cdot i \cdot n$$

Valor Nominal = $N = \text{Valor Futuro}$

Exemplo: Uma pessoa pretende resgatar um título de R\$ 5000, quatro meses antes da data de vencimento. Sabendo que a taxa de juros de desconto comercial é de 48%aa, qual o valor do desconto comercial ? e qual o valor atual comercial?

$$D_c = N \cdot i \cdot n \rightarrow 5000 \cdot \overset{\text{Taxa ao mês}}{0,04} \cdot 4 \rightarrow \mathbf{800}$$

Valor Atual Comercial : É o valor nominal menos o desconto comercial = $5000 - 800$
 Logo Valor Atual Comercial = **4200**

O Valor Atual Comercial pode ser calculado ainda por :

$$\text{Valor Atual Comercial} = N - N \cdot i \cdot n \rightarrow \overset{N \text{ em evidência}}{N \cdot (1 - i \cdot n)}$$

$$\text{Valor Atual Comercial} = 5000(1 - 0,04 \cdot 4) \rightarrow 5000 \cdot 0,84 \rightarrow \mathbf{4200}$$

2.20. Desconto Bancário e Valor Atual Bancário:

É aquele que se obtém pelo cálculo do juro simples tomando como valor-base de aplicação o valor nominal mais uma porcentagem sobre o valor nominal, cobrada pelo banco como taxa de serviços veja:

$$D_b = \overset{\text{valor de aplicação}}{N} \cdot i \cdot n + N \cdot s \rightarrow \overset{N \text{ em evidência}}{N \cdot (i \cdot n + s)}$$

Valor Nominal = $N = \text{Valor Futuro}$

Taxa de serviço = s

Em resumo é o desconto comercial mais uma taxa de serviço sobre o valor nominal.

Exemplo :

Uma pessoa pretende resgatar um título de R\$ 5000, quatro meses antes da data de vencimento. Sabendo que a taxa de juros é de 48% a.a, e que o banco cobra 2% como taxa de despesas administrativas, qual o valor do desconto bancário ? e qual o valor atual bancário ?

Resolução:

$$\text{Taxa ao mês} \\ \text{Db} = N \cdot i \cdot n + N \cdot s \rightarrow 5000 \cdot 0,04 \cdot 4 + 5000 \cdot 0,02 \rightarrow 800 + 100 \rightarrow \mathbf{900}$$

Ou

$$\text{Db} = N \cdot (i \cdot n + s) \rightarrow 5000 \cdot (0,04 \cdot 4 + 0,02) \rightarrow \mathbf{900}$$

Valor Atual Bancário: É o valor nominal menos o desconto bancário = 5000 – 900

Logo Valor Atual Bancário = **4100**

Valor Atual Bancário pode ser calculado ainda por :

$$\text{Valor Atual Bancário} = N - N \cdot (i \cdot n + s) \rightarrow \overset{\text{N em evidência}}{-N \cdot [1 - (i \cdot n + s)]}$$

$$\text{Valor Atual Bancário} = 5000[1 - (0,04 \cdot 4 + 0,02)] \rightarrow 5000 \cdot 0,82 \rightarrow \mathbf{4100}$$

2.21. Taxa Efetiva :

A taxa efetiva é aquela que realmente foi aplicada em um desconto, ela provém do desconto racional, pois o mesmo é derivado de equações matemáticas e não de convenções, como já foi visto.

A taxa efetiva é aquela do desconto racional que produz o mesmo valor de desconto que os outros tipos de descontos.

Assim temos taxa efetiva em relação ao desconto comercial, e taxa efetiva em relação ao desconto bancário.

Daí surge o conceito de **taxa aparente** que é a taxa expressa no contrato, e **taxa efetiva** que é aquela realmente aplicada.

2.21.1. Taxa Efetiva em Relação ao Desconto Comercial:

Assim a taxa efetiva em relação ao desconto comercial é encontrada por :

$$Dr = Dc \rightarrow \frac{N \cdot i_f \cdot n}{(1 + i_f \cdot n)} = N \cdot i \cdot n \rightarrow i_f = \frac{i}{1 - i \cdot n}$$

Exemplo : Uma pessoa pretende resgatar um título de R\$ 5000, quatro meses antes da data de vencimento. Sabendo que a taxa de juros de desconto comercial é de 48% a.a, qual o valor da taxa efetiva realmente cobrada ?

$$i_f = \frac{i}{1 - i \cdot n} = \frac{0,04}{1 - 0,04 \cdot 4} = 0,047\text{am} = 0,564\text{aa}$$

Ou seja de **4,7%** ao mês ou de **56,4%** ao ano e não de 48% ao ano como o problema diz.

Daí surge o conceito de **taxa aparente** que é a taxa expressa no contrato, e **taxa efetiva** que é aquela realmente aplicada. No nosso exemplo anterior a taxa aparente é 4%am ou 48%aa e a taxa efetiva é 4,7%am ou 56,4%aa.

2.21.2. Taxa Efetiva em Relação ao Desconto Bancário:

Assim a taxa efetiva em relação ao desconto bancário é encontrada por :

$$Dr = Db \quad \boxed{\frac{N \cdot i_f \cdot n}{(1 + i_f \cdot n)} = N \cdot (i \cdot n + s)} \quad \text{ou} \quad i_f = \frac{i \cdot n + s}{n - i \cdot n^2 - n \cdot s}$$

Exemplo: Uma pessoa pretende resgatar um título de R\$ 5000, quatro meses antes da data de vencimento. Sabendo que a taxa de juros é de 48%aa, e que o banco cobra 2% como taxa de despesas administrativas, qual o valor da taxa efetiva realmente cobrada ?

Como vimos:

$$\begin{aligned} Dr = Db &\rightarrow \frac{N \cdot i_f \cdot n}{(1 + i_f \cdot n)} = N \cdot (i \cdot n + s) \\ \frac{5000 \cdot i_f \cdot 4}{1 + i_f \cdot 4} &= 900 \rightarrow 20000i_f = 900 + 3600i_f \rightarrow \\ 20000i_f - 3600i_f &= 900 \rightarrow 16400i_f = 900 \rightarrow i_f = \frac{900}{16400} \end{aligned}$$

Logo $i_f = 0,0548$ ou seja **$i_f = 5,48\%$ ao mês ou $65,76\%$ ao ano**

2.22. Relação Entre Desconto Comercial e Desconto Racional:

Como observamos o desconto comercial é sempre maior que o desconto racional, logo podemos relacioná-los fazendo a divisão:

$$\frac{Dc}{Dr} = \frac{N \cdot i \cdot n}{N \cdot i_f \cdot n} \rightarrow \frac{Dc}{Dr} = 1 + i \cdot n$$

$$1 + i \cdot n$$

Logo :

$$Dc = Dr \cdot (1 + i \cdot n)$$

Exemplo: O desconto comercial de um título que descontado 5 meses antes de seu vencimento e à taxa de 36%aa, é de R\$ 340,00. Qual o desconto racional ?

$$Dc = Dr \cdot (1 + i \cdot n) \quad 340 = Dr \cdot (1 + 0,03 \cdot 5) \quad Dr = \frac{340}{1,15}$$

$$Dr = 295,65$$

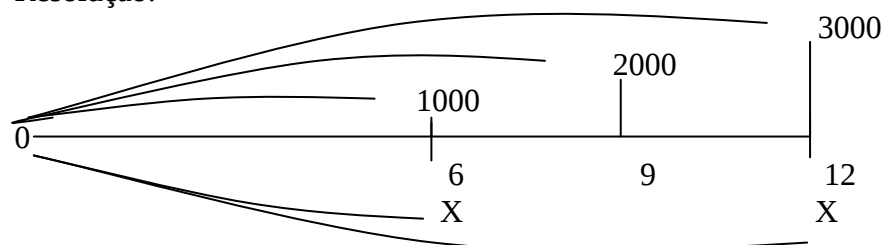
2.23. Equivalência de Capitais:

Não podemos equiparar, ou seja, igualar capitais ao longo do tempo, ou seja, em datas focais diferentes, então como fazer isso ? Um processo muito prático vêm responder essa pergunta, primeiro devemos encontrar o valor atual de todos os capitais que desejamos igualar, para só depois fazer as equiparações.

Exemplo: Uma empresa deve pagar R\$ 1000,00 daqui a 6 meses, R\$ 2000,00 em 9 meses e R\$ 3000,00 em 1 ano. O banco cuja taxa de juros é de 45% ao ano, aceita a liquidação da dívida em dois pagamentos iguais, sendo o primeiro em 6 meses e o segundo em 1 ano. Qual é o valor dos pagamentos se :

a) Fosse adotado o critério do desconto comercial e data focal zero (presente momento) ?

Resolução:



Como foi adotado desconto comercial, devemos encontrar o valor atual comercial de cada documento, e a soma das dívidas deverá ser igual ao valor dos dois novos documentos:

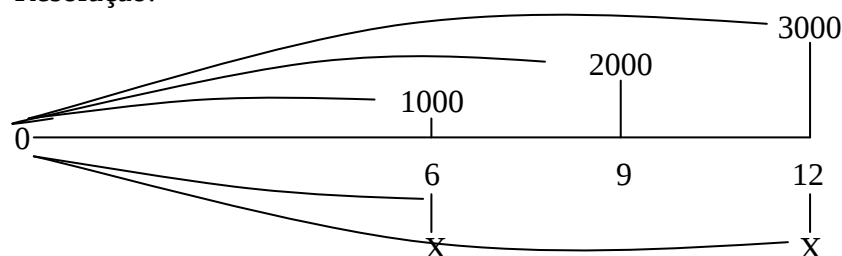
- 1º) $1000 \cdot (1 - 0,0375 \cdot 6) = 775$
- 2º) $2000 \cdot (1 - 0,0375 \cdot 9) = 1325$
- 3º) $3000 \cdot (1 - 0,45 \cdot 1) = 1650$
- 4º) $x \cdot (1 - 0,0375 \cdot 6) = 0,775x$
- 5º) $x \cdot (1 - 0,45 \cdot 1) = 0,55x$

$$\begin{aligned} 0,775x + 0,55x &= 3750 \\ 1,325x &= 3750 \\ x &= \frac{3750}{1,325} \\ x &= 2830,19 \end{aligned}$$

A empresa substituirá os três pagamentos anteriores por dois de R\$ 2830,19

b) Fosse adotado o critério do desconto racional e data focal zero (presente momento) ?

Resolução:



Como foi adotado desconto racional, devemos encontrar o valor atual racional de cada documento, e a soma das dívidas deverá ser igual ao valor dos dois novos documentos:

$$1^{\circ}) \frac{1000}{1 + 0,0375 \cdot 6} = 816,32$$

$$2^{\circ}) \frac{2000}{1 + 0,0375 \cdot 9} = 1495,32$$

$$3^{\circ}) \frac{3000}{1 + 0,45 \cdot 1} = 2068,96$$

$$4^{\circ}) \frac{x}{1 + 0,0375 \cdot 6} = \frac{x}{1,225} = \frac{1}{1,225} \cdot x = 0,816x$$

$$5^{\circ}) \frac{x}{1 + 0,45 \cdot 1} = \frac{x}{1,45} = \frac{1}{1,45} \cdot x = 0,689x$$

Logo a soma dos dois novos valores será igual a soma dos três valores anteriores

$$1,505x = 4380,60 \longrightarrow x = \frac{4380,60}{1,505} \longrightarrow x = 2910,70$$

A empresa substituirá os três pagamentos anteriores por dois de R\$ 2910,70

Problemas Propostos

1. Uma promissória de R\$ 2.200,00 foi resgatada três meses antes de seu vencimento por R\$ 2.035,00. Sabendo que foi aplicado o desconto comercial simples, qual é a taxa de desconto ?

(R = 2,5 % a.m.)

2. Uma duplicata foi resgatada 90 dias antes de seu vencimento, obtendo um desconto de R\$ 11.780,00. Sabendo que a taxa de desconto comercial simples na operação foi de 76% a.a., de quanto era o valor nominal da duplicata ?

(R = R\$ 62.000,00)

3. Determine o valor atual racional de um título com valor nominal de R\$ 8.000,00 que foi resgatado 3 meses antes de seu vencimento à uma taxa de 24% a.a.

(R = R\$ 7.547,17)

4. Determine o valor atual comercial de um título com valor nominal de R\$ 18.000,00 que foi resgatado 3 meses antes de seu vencimento à uma taxa de 36% a.a.

(R = R\$ 16.380,00)

5. Calcule o valor do desconto comercial e racional de um título com valor nominal de R\$ 18.000,00 que foi resgatado 5 meses antes de seu vencimento à uma taxa de 48% a.a.

(Dr = R\$ 3.000,00 e Dc = R\$ 3.600,00)

6. Qual será o desconto bancário em uma operação onde o valor nominal é de R\$ 7.000,00 e o prazo de antecipação é de 120 dias, a taxa é de 60% a.a., e a taxa administrativa que o banco cobra é de 1% ?

(R = R\$ 1.120,00)

7. Uma empresa deve liquidar dois títulos, um de R\$ 1.750,00 para 1 mês e outro de R\$ 1.960,00 para 4 meses. Não podendo Quitá-las no vencimento, o credor propões trocá-las por um único título para 5 meses. Qual o valor nominal do novo título, se a taxa de desconto comercial é de 4% a.m. ?

(R = R\$ 4.158,00)

8. Uma empresa deve três títulos: R\$ 2.300,00 para 3 mês, R\$ 1.400,00 para 5 meses e R\$ 2.800,00 para 8 meses. Não podendo Quitá-las no vencimento, o credor propões trocá-las por um único título para 10 meses. Qual o valor nominal do novo título, se a taxa de desconto racional é de 5% a.m. ?

(R = R\$ 7.680,00)

3. Juros Compostos

3.1. Conceito:

Vimos que nos juros simples só o capital inicial sofre capitalização. Já nos juros compostos o juro da primeira capitalização se incorpora no próprio capital inicial para juntos sofrerem a Segunda capitalização, que por sua vez se incorpora novamente no capital para sofrerem a terceira capitalização e assim por diante.

Vejamos a diferença entre capitalização simples e composta. Se aplicarmos R\$ 100,00 à 10% ao mês, durante três meses, teremos:

Capitalização Simples

Capitalização Composta

Capital inicial = 100	Capital inicial = 100
Final do 1º mês: $100 \cdot 0,1 \cdot 1 = 10$	Final do 1º mês: $100 \cdot 0,1 \cdot 1 = 10$
Final do 2º mês: $100 \cdot 0,1 \cdot 1 = 10$	Novo capital: $100 + 10 = 110$
Final do 3º mês: $100 \cdot 0,1 \cdot 1 = 10$	Final do 2º mês $110 \cdot 0,1 \cdot 1 = 11$
	Novo capital: $110 + 11 = 121$
	Final do 3º mês: $121 \cdot 0,1 \cdot 1 = 12,10$
Total no final da aplicação = R\$ 130,00	Total no final da aplicação = R\$ 133,10

Como vimos, na capitalização composta os juros dos períodos anteriores se incorporam no capital para juntos sofrerem juros dos períodos seguintes por isso o juro composto também é conhecido como **juros sobre juros**. Gerando assim um montante no final da aplicação maior que nos juros simples.

3.2. Taxas Proporcionais: Não são equivalentes, como no caso de juros simples: capitais iguais, em prazos iguais, produzem montante diferentes

Exemplo: R\$ 1.000,00 aplicados por 5 anos a 10% ao ano produzem R\$ 1.610,51.

Exemplo: R\$ 1.000,00 aplicados por 5 anos a 5% ao semestre produzem R\$ 1.628,89.

3.3. Taxas Equivalentes: Capitais iguais, em prazos iguais, produzem o mesmo montante

$$(1 + i_1)^{n_1} = (1 + i_2)^{n_2}$$

Exemplo: 3% ao mês equivale a 9,2727% ao trimestre.

Exemplo: 10% ao ano equivale a 4,8809% ao semestre.

3.4.. Taxas Equivalentes

São equivalentes aquelas taxas que aplicadas a um mesmo capital durante um mesmo prazo, produzem o mesmo montante. Relacionando a taxa anual com as taxas semestrais, quadrimestrais, trimestrais, bimestrais, mensais e diárias, obteremos as fórmulas a seguir:

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_q)^3 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_b)^6 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

Trabalhamos sempre relacionando duas quaisquer dessas taxas, ou seja, se você tem a taxa anual e quer saber a taxa bimestral relacionam-se essas duas taxas, e assim por diante.

Exemplo : Quais as taxas trimestral, semestral e anual equivalente a taxa de 3% ao mês ?

- Taxa anual: $(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \rightarrow (1 + i_a) = (1,03)^{12}$

-

$$1 + i_a = 1,42576 \rightarrow i_a = 1,42576 - 1 \rightarrow i_a = 0,42576$$

Ou seja, 42,576% aa

- Taxa semestral: $(1 + i_s)^2 = (1 + i_m)^{12} \rightarrow (1 + i_s)^1 = (1 + i_m)^6 \rightarrow 1 + i_s = 1,03^6$

-

$$1 + i_s = 1,1940 \rightarrow i_s = 1,1940 - 1 \rightarrow i_s = 0,1940$$

Ou seja, 19,40%as

- Taxa trimestral: $(1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} \rightarrow (1 + i_t) = (1 + i_m)^3$

-

$$1 + i_t = 1,03^3 \rightarrow i_t = 1,09272 - 1 \rightarrow i_t = 0,09272$$

Ou seja, 9,272%at

3.5. Taxa Efetiva ou Taxa Real:

É aquela em que a unidade de tempo da taxa coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Veja alguns exemplos de taxas efetivas:

- a) 3% ao mês, capitalizados mensalmente;
- b) 6% ao semestre, capitalizados semestralmente;
- c) 12% ao ano, capitalizados anualmente.

3.6. Taxa Nominal: É aquela que está definida em período de tempo diferente do período de capitalização

É aquela em que a unidade de tempo da taxa não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Ela geralmente é fornecida em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser bimestrais, trimestrais, ou qualquer outra medida de tempo.

Exemplo de taxas nominais:

- a) 13% ao ano, capitalizados semestralmente;
- b) 12% ao ano, capitalizados bimestralmente.

3.6.1. Transformação de Taxa Nominal em Taxa Efetiva:

Não se trabalha com a taxa nominal, e sim com a taxa efetiva, portanto muitas vezes devemos transformar a taxa nominal em efetiva. Para se transformar uma taxa nominal em taxa efetiva, devemos dividir a taxa nominal pela quantidade de capitalizações que a unidade de tempo da taxa nos dá.

Veja algumas transformações:

- a) 12% aa, capitalizados mensalmente, nos dá uma taxa efetiva de :

$$12\% : 12 \text{ capitalizações} = 1\% \text{ ao mês}$$

- b) 10% aa, capitalizados trimestralmente, nos dá uma taxa efetiva de :

$$10\% : 4 \text{ capitalizações} = 2,5\% \text{ ao trimestre}$$

Problemas Propostos

- 1) Uma pessoa tem dois títulos: um de valor nominal de R\$ 5.000,00 com vencimento em 2 meses, e outro de valor nominal de R\$ 8.000,00 com vencimento em 4 meses. Ele os trocou por uma nota promissória com vencimento para 6 meses. Se a taxa de juros composto racional é de 36% a.a., capitalizados bimestralmente, o valor da nota promissória em seu vencimento será de ?

(R = R\$ 14.097,99)

- 2) Uma pessoa tem dois títulos: um de valor nominal de R\$ 2.000,00 com vencimento em 3 meses, e outro de valor nominal de R\$ 4.000,00 com vencimento em 6 meses. Ele os trocou por um outro título com vencimento para 9 meses. Se a taxa de juros composto comercial é de 36% a.a., capitalizados trimestralmente, o valor da nota promissória em seu vencimento será de ?

(R = R\$ 6.810,77)

- 3) Um título no valor de R\$ 10.000,00 vence hoje, enquanto outra no valor de R\$ 20.000,00 vence em 4 meses. A taxa de juros compostos de 5% a.m., e considerando um desconto racional, obtenha o valor da dívida equivalente às duas anteriores, com vencimento ao fim de 6 meses ?

(R = R\$ 35.450,94)

- 4) Um título no valor de R\$ 50.000,00 vence hoje, enquanto outra no valor de R\$ 80.000,00 vence em 3 meses. A taxa de juros compostos de 3% a.m., e considerando

um desconto comercial, obtenha o valor da dívida equivalente às duas anteriores, com vencimento ao fim de 4 meses, desprezando os centavos ?

(R = R\$ 138.952,00)

3.7. Convenção Exponencial e Linear

Tanto a convenção exponencial quanto a linear é utilizada quando o prazo de aplicação não é um número inteiro de períodos a que se refere a taxa.

- **Convenção Exponencial** : O montante utilizando convenção exponencial é dado por: $M = C_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i)^{p/q}$ onde n é igual ao n° de períodos inteiros, e p/q é o período não inteiro (quebrado).
- **Convenção Linear** : O montante utilizando convenção Linear é dado por : $M = C_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot m)$ onde n = período(s) inteiro(s), e (m) é o período não inteiro (quebrado).

Exemplo: Um valor de R\$ 10.000,00 é emprestado a taxa de juros composto de 21% a.a., pelo prazo de 5 anos e 6 meses. Calcule o montante utilizando a convenção exponencial e linear.

- Convenção Exponencial:

$$M = C_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i)^{p/q} \quad M = 10.000 \cdot (1,21)^5 \cdot (1,21)^{1/2}$$

$$M = 25937,4246 \cdot \sqrt{1,21} \quad M = 25937,4246 \cdot 1,1 \quad M = 28531,17$$

- Convenção Linear:

$$M = C_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot m) \quad M = 10.000 \cdot (1,21)^5 \cdot (1 + 0,21 \cdot \frac{1}{2})$$

$$M = 28660,85$$

3.8. Cálculo do Montante e do Juro:

Relembrando que nos juros simples o montante é dado por $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$, fazendo o período (n) igual a um para cada mês, teremos: $M = C \cdot (1 + i \cdot 1)$, como o número 1 é o elemento neutro na multiplicação, podemos aqui desprezá-lo, assim teremos $M = C \cdot (1 + i)$, prosseguindo :

Fazendo capital inicial = C_0 , teremos:

- $C_1 = C_0 \cdot (1 + i)$ isso nos dá o valor no final do 1º mês
- $C_2 = C_1 \cdot (1 + i)$ como $C_1 = C_0 \cdot (1 + i)$, teremos:

- $C_2 = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$ isso nos dá o valor no final do 2º mês
- $C_3 = C_2 \cdot (1 + i)$ como $C_2 = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$, teremos:
- $C_3 = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$ que nos dará o valor no final do 3º mês.

Mas se $C_3 = C_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$ então teremos:

$C_3 = C_0 \cdot (1 + i)^3$ utilizando esse raciocínio podemos generalizar para (n) capitalizações, obtendo assim a fórmula dos juros compostos: $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$, C_n também é conhecido como M de montante, e C_0 como C de capital, assim teremos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Vamos calcular novamente o valor total no final da aplicação de R\$ 100,00 à 10% ao mês, durante três meses:

$$100 \cdot (1 + 0,1)^3 \rightarrow 100 \cdot 1,1^3 \rightarrow 100 \cdot 1,331 \rightarrow \mathbf{131,10}$$

Os juros, são dados pela diferença entre o capital final e o capital inicial:

$$J = C_n - C_0 \rightarrow C_0 \cdot (1 + i)^n - C_0 \quad \text{colocando } C_0 \text{ em evidência teremos:}$$

$$J = C_0 \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Exemplo: Uma pessoa aplica R\$ 10.000,00 a juros de 2% am pelo período de 1 ano com capitalização composta. Qual é o montante e o juro da aplicação?

$$M = 10.000 \cdot (1 + 0,02)^{12} \rightarrow 10.000 \cdot 1,268241 \rightarrow \mathbf{12682,41}$$

$$\text{Portanto o juro foi de } C_n - C_0 \rightarrow 12700 - 10000 \rightarrow \mathbf{2682,41}$$

$$\text{Ou aplicando a fórmula: } J = C_0 \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

$$J = 10.000 \cdot [(1 + 0,02)^{12} - 1] \rightarrow \mathbf{2682,41}$$

Exemplo: (Cespe/UNB-TCDF/ACEF/95) Para que se obtenha R\$ 242,00, ao final de seis meses, a uma taxa de juros de 40% aa., capitalizados trimestralmente, deve-se investir, hoje, a quantia de:

- a) R\$ 171,43 b) R\$ 172,86 c) R\$ 190,00 d) R\$ 200,00 e) R\$ 220,00

Solução:

Primeiro devemos achar a taxa efetiva (40 : 4 capitalizações = 10% ao trimestre)

Observe que o prazo de aplicação (seis meses = dois trimestres) logo $n = 2$

Aplicando a fórmula $M = C_0 \cdot (1 + i)^n$, teremos: $242 = C_0 \cdot (1,1)^2 \rightarrow$

$$242 = C_0 \cdot 1,21 \quad C_0 = \frac{242}{1,21} \quad C_0 = \mathbf{200}$$

Portanto devemos investir hoje R\$ 200,00, para que nas condições descritas acima tenhamos no final de seis meses R\$ 242,00.

Problemas Propostos

- 1) Peguei emprestado R\$ 10.000,00 a juros de 3% a.m. pelo prazo de seis meses com capitalização composta. Quanto terei que devolver no final do prazo ?

(R = R\$ 11.940,52)

- 2) Quanto de juros terá que pagar uma pessoa que emprestou R\$ 10.000,00 à taxa de 2% a.m. de juros compostos pelo prazo de 8 meses ?

(R = R\$ 1.716,59)

- 3) Uma pessoa emprestou o capital de R\$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 21% a.a., pelo prazo de 2 anos e 6 meses. Utilizando a convenção exponencial, quanto a pessoa terá que devolver no final do prazo ?

(R = R\$ 1.610,51)

- 4) Uma pessoa emprestou o capital de R\$ 15.000,00 à taxa de juros compostos de 20% a.a., pelo prazo de 2 anos e 6 meses. Utilizando a convenção linear, quanto a pessoa terá que devolver no final do prazo ?

(R = R\$ 23.760,00)

- 5) Que quantia mínima devo aplicar hoje a juros compostos, à taxa anual de 21%, para que ao completar um período de 4 anos eu consiga, como montante, comprar um carro no valor de R\$14.600,00?

(R = R\$ 6.811,00)

- 6) Ao resgatar um título, após 6 meses de aplicação, o investidor recebeu R\$ 18.345,60. Tendo sido informado de que este montante incluía R\$ 4.345,60 referente aos juros creditados. Qual a taxa semestral que investidor ganhou ?

(R = 31,04% a.s.)

- 7) Qual é o juro auferido por um capital de R\$ 2.000,00 aplicado à taxa de juros compostos de 10% a.m. durante 4 meses ?

(R = R\$ 928,20)

3.9. Desconto Comercial e Valor Atual Comercial:

É o desconto obtido ao resgatar-se um compromisso antes do seu vencimento. O desconto comercial é obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual comercial.

O valor atual comercial é obtido pela diferença entre o valor nominal e os juros incidentes sobre o valor nominal levando em consideração o tempo de antecipação do compromisso.

Os juros incidentes sobre o valor nominal no primeiro período antes do vencimento são dados por:

$$J1 = N \cdot i \cdot 1 \quad \text{desconsiderando o número 1 teremos } J1 = N \cdot i$$

Portanto o valor atual comercial com período de antecipação igual a um (1) será:

$$Vc1 = N - N \cdot i \quad \text{com } N \text{ em evidência temos } \quad vc1 = N \cdot (1 - i)$$

Agora o nosso novo valor nominal é $vc1$, e os juros incidentes sobre o valor nominal no segundo período é dado por:

$$J2 = vc1 \cdot i \quad \text{como } vc1 = N \cdot (1 - i)$$
$$J2 = N \cdot (1 - i) \cdot i$$

Logo o valor atual com período de antecipação dois (2) será:

$$Vc2 = N \cdot (1 - i) - N \cdot (1 - i) \cdot i \quad \text{com } N \cdot (1 - i) \text{ em evidência teremos:}$$
$$Vc2 = N \cdot (1 - i) \cdot (1 - i) \quad \text{que será } \quad Vc2 = N \cdot (1 - i)^2$$

Generalizando para n períodos antes do seu vencimento teremos :

- **$Vcn = N \cdot (1 - i)^n$ que nos dá o valor atual comercial**

Como o desconto comercial é dado pela diferença entre o valor nominal e o valor atual comercial temos:

$$Dc = N - Vcn \quad \text{logo teremos}$$
$$Dc = N - N \cdot (1 - i)^n \quad \text{com } N \text{ em evidência temos } \quad Dc = N \cdot [1 - (1 - i)^n]$$

Exemplo: Um título no valor de R\$ 100.000,00 será saldado 3 meses antes de seu vencimento. O portador do título conseguiu uma taxa de desconto comercial (composto) de 5% am. Qual o valor que o portador recebeu ? e qual o valor do desconto comercial ?

Primeiro vamos obter o valor atual comercial (o valor que o portador recebeu)

$$Vc = 100000 \cdot (1 - 0,05)^3 \quad Vc = 100000 \cdot 0,857375 \quad \mathbf{Vc = 85737,50}$$

Logo o desconto comercial será:

$$Dc = N - Vc \quad Dc = 100000 - 85737,50 \quad \mathbf{Dc = 14262,50}$$

3.10. Desconto Racional e Valor Atual Racional:

É o desconto obtido ao resgatar-se um compromisso antes do seu vencimento. O desconto racional é obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual racional.

O valor atual racional é obtido pela própria fórmula do montante, fazendo a transformação necessária, pois como vimos o próprio montante é o valor nominal e o capital aplicado o próprio valor atual racional veja:

$$N = V_r \cdot (1 + i)^n \quad \text{isolando } V_r \text{ no primeiro membro teremos:}$$

$$V_r = \frac{N}{(1 + i)^n} \quad \text{que nos dá o valor atual racional}$$

Como o desconto racional é a diferença entre o valor nominal e o valor atual racional, então temos:

$$D_r = N - V_r$$

$$D_r = N - \frac{N}{(1 + i)^n} \rightarrow \text{com } N \text{ em evidência teremos } D_r = N \cdot \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n} \right] \text{ ou}$$

$$D_r = N \cdot [1 - (1 + i)^{-n}]$$

Exemplo: Um título no valor de R\$ 100.000,00 será saldado 3 meses antes de seu vencimento. O portador do título conseguiu uma taxa de desconto racional (composto) de 5% am. Qual o valor que o portador recebeu ? e qual o valor do desconto racional ?

Primeiro vamos obter o valor atual racional (o valor que o portador recebeu)

$$V_r = \frac{N}{(1 + i)^n} \rightarrow V_r = \frac{100000}{(1 + 0,05)^3} \rightarrow V_r = \frac{100000}{1,157625}$$

$$V_r = 86383,76$$

$$\text{Logo o desconto racional será : } N - V_r \rightarrow 100000 - 86383,76$$

$$D_r = 13616,24$$

Problemas Propostos

- 1) Qual o valor atual de um título cujo valor nominal é de R\$ 500,00 e é resgatado 3 anos antes do vencimento, à taxa de desconto comercial composto de 20% a.a., capitalizados semestralmente ?

(R = R\$ 265,72)

- 2) Um título de crédito de valor de face de R\$ 34.000,00 foi resgatado 2 meses antes de seu vencimento. Utilizando o desconto comercial composto, à 3% a.m., qual o valor líquido do título ?

(R = R\$ 31.990,60)

- 3) No regime de capitalização composta, à taxa mensal de 10%, um título de valor nominal de R\$ 5.541, é resgatado 2 meses antes de seu vencimento. O valor do desconto racional será de ?

(R = R\$ 961,66)

- 4) Qual o valor atual de um título cujo valor nominal é de R\$ 50.000,00 e é resgatado 3 meses antes do vencimento, à taxa de desconto racional composto de 10% a.m. ?

(R = R\$ 37.565,74)

- 5) Qual a taxa de desconto racional composto que equivale a 20% de desconto comercial composto?

(R = R\$ 25%)

- 6) Qual a taxa aproximada de desconto comercial composto que equivale a 10% de desconto racional composto?

(R = R\$ 9,1%)

3.11. Equivalência de Capitais:

Como vimos no juro simples não podemos equiparar capitais em datas focais diferentes, portanto devemos puxar os valores nominais para uma mesma data focal, de preferência data focal zero (presente momento), ou seja, devemos primeiro achar o valor atual naquele presente momento, para só depois fazermos as equiparações.

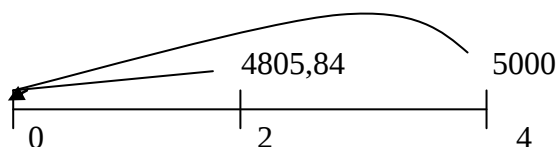
Devemos nos lembrar que o valor atual de um título é o valor nominal menos o desconto praticado, desconto esse que pode ser racional, comercial ou bancário. Aqui veremos apenas os valores atuais que são praticados com descontos racionais e comerciais por serem os mais usados em equivalência de capitais.

3.11.1. Equivalência com Desconto Racional:

Os capitais serão equivalentes se seus valores atuais racionais forem iguais. Portanto devemos primeiro achar os valores atuais racionais para só depois fazermos a comparação.

Exemplo1: Um título com valor nominal de R\$ 5000,00, com vencimento para 4 meses, é trocado por outro de R\$ 4805,84, com vencimento para 2 meses. Sabendo que a taxa de juros corrente de mercado é de 2%am, pergunta-se a substituição foi vantajosa?

Resolução: vamos puxar os valores para a data focal zero para depois comparar.



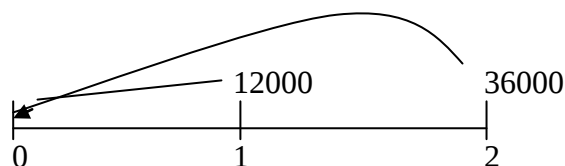
$$V1 = \frac{5000}{(1+0,02)^4} \rightarrow \frac{5000}{1,08243216} \rightarrow \mathbf{4619,22}$$

$$v2 = \frac{4805,84}{(1+0,02)^2} \rightarrow \frac{4805,84}{1,0404} \rightarrow \mathbf{4619,22}$$

Como os valores atuais são iguais não há vantagem e nem desvantagem.

Exemplo2 : Uma financeira oferece a um cliente dois títulos, o primeiro vencendo em 1 ano, no valor de R\$ 12000,00, e o segundo em 2 anos, no valor de R\$ 36000,00. O cliente aceita a oferta e assina uma nota promissória, com vencimento para 6 meses. Sabendo-se que a taxa de juros da operação foi de 20% ao ano. Qual o valor da nota promissória em seu vencimento ?

Solução: vamos puxar os valores para a data focal zero para depois comparar.



$$\text{Como } Vr = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$v1 = \frac{12000}{(1+0,2)} \rightarrow \frac{12000}{1,2} \rightarrow \mathbf{10000}$$

$$v2 = \frac{36000}{(1+0,2)^2} \rightarrow \frac{36000}{1,44} \rightarrow \mathbf{25000}$$

O valor nominal da promissória será a incógnita N, como o valor é nominal, devemos colocá-lo na forma de valor atual:

$$V3 = \frac{N}{(1+0,2)^{1/2}} \rightarrow \frac{N}{\sqrt{1,2}} \rightarrow \frac{N}{1,095445}$$

agora devemos igualar os capitais onde o valor atual da promissória será igual a soma dos valores atuais dos documentos oferecidos.

$$\frac{N}{1,095445} = 10000 + 25000 \rightarrow \frac{N}{1,095445} = 35000$$

$$N = 1,095445 \cdot 35000 \rightarrow N = \mathbf{38340,58}$$

Portanto o valor da promissória será de R\$ 38340,58

3.11.2. Equivalência com Desconto Comercial:

Os capitais serão equivalentes se seus valores atuais comerciais forem iguais. Portanto devemos primeiro achar os valores atuais comerciais para só depois fazermos a comparação.

Exemplo1: Dois títulos, um de R\$ 20000,00, para 6 meses e outro de R\$ 50000,00, para 1 ano, são trocados por um único, vencendo em 9 meses. Se for adotada a taxa de desconto comercial de 2% ao mês, qual será o valor deste novo título ?

Solução: vamos puxar os valores para a data focal zero para depois comparar.

$$\text{Como } Vc = N \cdot (1 - i)^n$$

$$\begin{array}{llll} V1 = 20000 \cdot (1 - 0,02)^6 & = & 20000 \cdot 0,88584 & = \mathbf{17716,80} \\ V2 = 50000 \cdot (1 - 0,02)^{12} & = & 50000 \cdot 0,78471 & = \mathbf{39235,50} \\ V3 = N \cdot (1 - 0,02)^9 & = & N \cdot 0,83374 & = \mathbf{0,83374N} \end{array}$$

Agora é só fazer a comparação, o título que procuramos deve ter o valor da soma dos dois títulos que desejamos trocar.

$$0,83374N = 17716,80 + 39235,50 \quad = \quad 0,83374N = 56952,30$$

$$N = \frac{56952,30}{0,83374} = N = \mathbf{68309,42}$$

Exemplo2 : Uma pessoa deve a uma financeira R\$ 20000,00 em 12 meses, resolve antecipar parte de sua dívida pagando hoje R\$ 5000,00, comprometendo-se a pagar R\$ 12000,00 em 6 meses. Que valor restante será pago em 12 meses, se a taxa de desconto comercial considerada foi de 10% ao semestre?

Primeiro vamos achar o valor de sua dívida hoje, achando o valor atual comercial.

$$V1 = 20000 \cdot (1 - 0,1)^2 = 20000 \cdot 0,81 = \mathbf{16200}$$

Como foi pago hoje R\$ 5000 então temos $16200 - 5000 = \mathbf{11200}$ restantes

Agora vamos ver o valor atual comercial do 2º título:

$$V2 = 12000 \cdot (1 - 0,1)^1 = 12000 \cdot 0,9 = \mathbf{10800}$$

$$\text{O valor restante será } v_3 = N \cdot (1 - 0,1)^2 = \mathbf{0,81N}$$

Fazendo a comparação:

$$0,81N + 10800 = 11200 \rightarrow 0,81N = 11200 - 10800 \rightarrow 0,81N = 400$$

$$N = \frac{400}{0,81} \rightarrow \mathbf{N = 493,83}$$

3.11.3. Ganho Real e Ganho Nominal

Ganho nominal refere-se àquele praticado com uma taxa nominal, ou taxa corrente, enquanto o ganho real, refere-se àquele, praticado com uma taxa real, já retirada a parcela influenciada pela inflação do período.

O processo para se achar o ganho real na capitalização composta não é tão simples como se parece, dada a taxa nominal e a taxa da inflação devemos primeiro aplicar uma fórmula para acharmos a taxa real e em seguida calcularmos o ganho real.

A fórmula para se achar a taxa real é dada por:

$$1 + r = \frac{1 + n}{1 + i}$$

onde: r = taxa real

n = taxa nominal ou corrente

i = taxa da inflação no período

Exemplo : (Cespe/UNB-TCDF/ACEF/95) A renda nacional de um país cresceu 110% em um ano, em termos nominais. Nesse mesmo período, a taxa de inflação foi de 100%. O crescimento real da renda foi então de:

- a) 5% b) 10% c) 15% d) 105% e) 110%

Resolução:

Nesse caso é só acharmos a taxa real $1 + r = \frac{1 + n}{1 + \text{inf.}}$

$$1 + r = \frac{1 + 1,1}{1 + 1} \rightarrow 1 + r = \frac{2,1}{2} \rightarrow 1 + r = 1,05 \rightarrow r = 1,05 - 1$$

$$\text{logo } r = 0,05 \rightarrow \mathbf{5\%}$$

Problemas Propostos

- 1) Para que se obtenha R\$ 340,00, ao final de seis meses, a uma taxa de juros de 40% aa., capitalizados trimestralmente, deve-se investir, hoje, a quantia de:

(R = R\$ 280,99)

- 2) A caderneta de poupança remunera seus aplicadores a taxa nominal de 36% a.a., capitalizada mensalmente, no regime de juros composto. Qual é o valor do juro obtido pelo capital de R\$ 50.000,00 durante 2 meses ?

(R = R\$ 3.045,00)

- 3) No Brasil as cadernetas de poupança pagam, além da correção monetária, juros compostos à taxa nominal de 48% a.a., com capitalização mensal. A taxa efetiva bimestral é então:

(R = 8,16% a.b.)

- 4) A taxa de 36% ao trimestre, com capitalização mensal, corresponde a uma taxa efetiva bimestral de:

(R = 25,44% a.b.)

- 5) A taxa de 30% ao bimestre, com capitalização mensal, é equivalente a uma taxa efetiva trimestral de:

(R = 52,0875%)

- 6) Uma pessoa fez uma aplicação durante 6 meses à uma taxa de 15% ao semestre. A inflação neste semestre foi de 9%. Qual o ganho real dessa pessoa ?

(R = 5,5045%)

4. Anuidades(Rendas Certas)

4.1. Rendas Certas:

Quando se faz um empréstimo, ou se financia um bem comprometendo-se a pagar posteriormente em parcelas iguais, nada nos impede de quitarmos o compromisso de uma vez só, mas, para isso devemos antes puxarmos o saldo devedor para o valor presente (atual) e depois saldarmos o compromisso.

Em operações financeiras que devemos saldar ou receber um compromisso em uma série de pagamentos ou recebimentos de parcelas iguais, ou seja, pré-fixadas, estamos falando de **rendas certas**, justamente porque não mudam.

As rendas certas que trataremos aqui são as temporárias periódicas, ou seja, aquelas que tem uma duração limitada de igual período para recebimentos ou pagamentos.

As rendas certas são **imediatas**, quando são exigidas a partir do primeiro período.

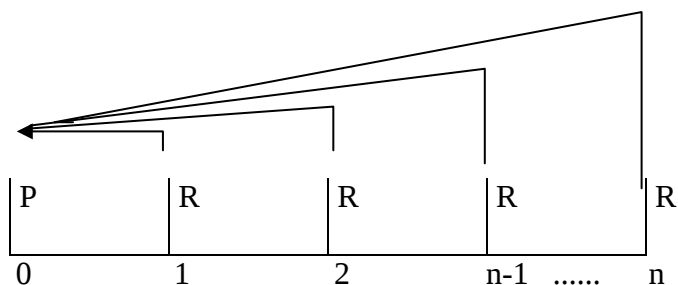
As rendas certas são **diferidas**, quando forem exigidas a partir de uma data que não seja o primeiro período.

As rendas certas tanto imediata quanto diferida podem ser **antecipadas** ou **postecipadas**. Antecipadas são aquelas exigidas no início do período, e postecipadas aquelas que são exigidas no final do período, que é a mais comum em empréstimos e financiamentos de bens.

4.1.2 Rendas Certas Postecipadas:

São aquelas exigidas no final do período, ou seja, quando se financia algo hoje, cujo pagamento ocorrerá mensalmente em várias parcelas, e a primeira delas será exigida um mês depois.

Imaginemos um certo empréstimo a ser pago em n parcelas iguais a R , imediatos, postecipados e periódicos sob uma certa taxa i de juros. Observe a representação gráfica:



A soma do valor atual(presente) dos termos na data focal zero é dado por:

$$P = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Colocando R em evidência teremos:

$$P = R \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Igualando a soma entre colchetes a $\boxed{a_{\overline{n}|i}}$ (Lê-se “a, n cantoneira i”)

Teremos: $\boxed{P = R \cdot a_{\overline{n}|i}}$

O desenvolvimento da soma entre colchetes é igual a : $\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$

$$\text{Logo } a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Geralmente em concursos o valor de “a, n cantoneira i” é dado em uma tabela.
O que acabamos de ver é válido para rendas certas postecipadas.

Exemplo 1: Um aparelho custa R\$ 8000,00 a vista, ou financiado em 10 prestações mensais iguais, exigidas no final do período. Se taxa de juros da operação é de 3% am., calcule o valor da prestação.

Resolução: $P = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ $8000 = R \cdot 8,530203$

$$R = \frac{8000}{8,530203} = R = 937,84$$

Exemplo 2: Um Certo objeto está sendo vendido da seguinte maneira: R\$ 2000,00 de entrada e três prestações mensais iguais de R\$ 1100,00. Sabendo que a taxa de juro da operação foi de 2%am. Qual o preço a vista ?

Resolução: primeiro vamos achar o valor atual das três prestações, para somar ao valor da entrada.

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i} \quad P = 1100 \cdot a_{\overline{3}|2} \quad P = 1100 \cdot 2,883883$$

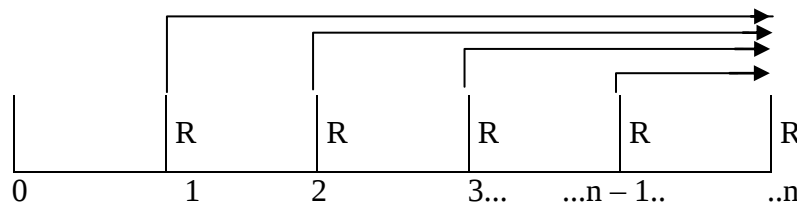
$$P = 3172,27$$

Logo o preço a vista é: $3172,27 + 2000 = 5172,27$

4.1.3 Montante em Rendas Certas Postecipadas:

Imaginemos agora uma série finita de depósitos iguais (R), periódicos e postecipados, a uma taxa de juros (i) referida ao mesmo período dos depósitos, a fim de gerar um montante (S) em uma certa data focal (n), que será o resultado desse processo de capitalização.

Veja a representação gráfica:



Como é de se perceber o montante (S) é a soma dos montantes de cada um dos depósitos, a taxa (i), até a data focal (n). Assim teremos:

$$S = R + R.(1 + i)^1 + R.(1 + i)^2 + \dots + R.(1 + i)^{n-1}$$

Com R em evidência teremos:

$$S = R.[1 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1}]$$

Igualando todo o somatório que está entre colchetes a $\boxed{S_{\overline{n}|i}}$ teremos:

$$S_{\overline{n}|i} = [1 + (1 + i)^1 + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1}]$$

Logo o nosso montante será dado por:

$$\boxed{S = R \cdot S_{\overline{n}|i}} \quad \text{lê-se : "S, n cantoneira i"}$$

Geralmente em concursos o valor de "S, n cantoneira i" é dado em uma tabela.

Exemplo1: Uma certa pessoa deposita R\$ 350,00 mensalmente em uma poupança. Sabendo-se que a poupança paga uma taxa de 0,5%am., quanto possuirá no final de um ano ?

Dados: R = 350

$$S_{\overline{12}|0,5} = 12,335562$$

$$\text{Resolução : } S = R \cdot S_{\overline{n}|i} \longrightarrow S = 350 \cdot 12,335562 \longrightarrow S = \mathbf{4.317,45}$$

Exemplo2: Uma pessoa deseja comprar daqui a 12 meses uma motocicleta no valor de R\$ 12.000,00, à vista,. Quanto ele terá que poupar mensalmente, sabendo que aplicação feita por ele rende 1,5% ao mês ?

Dados: S = 12.000

$$S_{\overline{12}|1,5} = 13,041211$$

$$\text{Resolução : } S = R \cdot S_{\overline{n}|i} \longrightarrow 12.000 = R \cdot 13,041211 \longrightarrow R = \frac{12.000}{13,041211}$$

$$\mathbf{R = 920,16}$$

Problemas Propostos

- 1) Um bem foi adquirido através de um plano de 6 prestações de R\$ 200,00 mensais iguais e consecutivas, sem entrada. A 1ª prestação ocorre a 30 dias da data de sua aquisição. A taxa negociada é de 3% a.m. e o regime é de capitalização composta. O valor à vista do bem desprezando os centavos é de ?

$$(R = \text{R\$ } 1.083,00)$$

- 2) Um financiamento foi adquirido através de um plano de 5 prestações de R\$ 1.000,00 anuais iguais e consecutivas, sem entrada. A 1ª prestação ocorre a 1 ano da data de sua aquisição. A taxa negociada é de 15% a.a. e o regime é de capitalização composta. O valor do financiamento desprezando os centavos é de ?

(R = R\$ 3.352,00)

- 3) Um automóvel no valor de R\$ 8.500,00 foi adquirido através de um plano de financiamento de 36 prestações mensais iguais e consecutivas, sem entrada. A 1ª prestação ocorre a 30 dias da data de sua aquisição. A taxa negociada é de 2% a.m. e o regime é de capitalização composta. O valor de cada prestação é de ?

(R = R\$ 333,48)

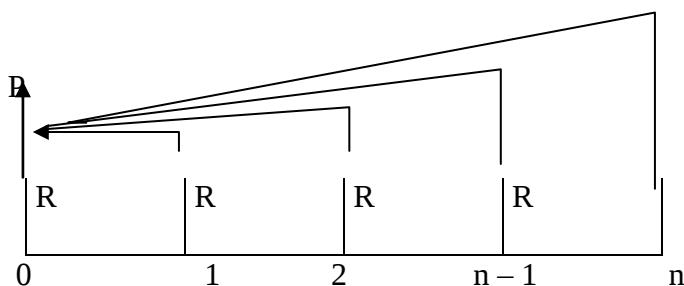
- 4) Uma pessoa deposita todo final de mês R\$ 150,00, em um banco que paga 1,5% a.m.,. Sabendo que o 1º depósito ocorreu no final de janeiro, quanto ela possuirá no final de dezembro ?

(R = R\$ 1.956,18)

4.1.4 Rendas Certas Antecipadas:

São aquelas exigidas no início do período, ou seja, quando se financia algo hoje, cujo pagamento ocorrerá mensalmente em várias parcelas, e a primeira delas será exigida no início do primeiro mês, ou seja, no momento do financiamento, e as outras no início de cada mês.

Imaginemos um certo empréstimo a ser pago em n parcelas iguais a R , imediatas, antecipadas e periódicas sob uma certa taxa i de juros. Observe a representação gráfica:



A soma do valor atual(presente) dos termos na data focal zero é dado por:

$$P = R + \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}$$

Colocando R em evidência teremos:

$$P = R \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

Como sabemos o número um é o elemento neutro na multiplicação, então se multiplicarmos o segundo membro por $(1+i)/(1+i)$, a igualdade não se altera, pois, tudo que é dividido por si mesmo é sempre um. Logo teremos:

$$P = R \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right]$$

$$P = R \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Já vimos que o valor entre colchetes é igual a

$$a_{\overline{n}|i}$$

Teremos:
$$P = R \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Como é de se perceber basta multiplicar por $(1+i)$ o modelo de renda postecipadas.

Teremos:
$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

Veja o exemplo a seguir

Exemplo2: Um Certo objeto está sendo vendido da seguinte maneira: três prestações mensais iguais de R\$ 200,00, sendo a primeira no ato da aquisição. Sabendo que a taxa de juro da operação foi de 2%am. Qual o preço a vista ?

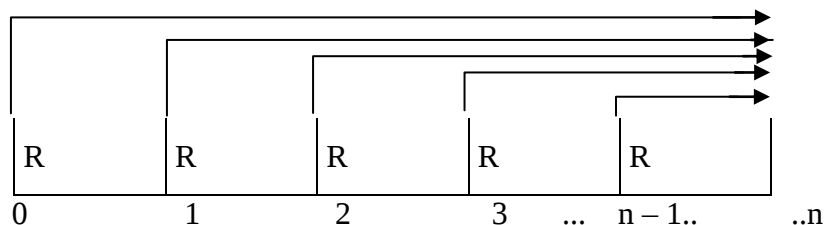
$$P = R \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) \longrightarrow P = 200 \cdot 2,883883 \cdot (1+0,02)$$

$$P = \text{R\$ } 588,31$$

4.1.5 Montante em Rendas Certas Antecipadas:

Imaginemos agora uma série finita de depósitos iguais (R), antecipados, imediatos e periódicos, a uma taxa de juros (i) referida ao mesmo período dos depósitos, a fim de gerar um montante (S) em uma certa data focal (n).

Veja a representação gráfica:



Como é de se perceber o montante (S) é a soma dos montantes de cada um dos depósitos, a taxa (i), até a data focal (n). Assim teremos:

$$S = R.(1+i)^1 + R.(1+i)^2 + R.(1+i)^3 + \dots + R.(1+i)^{n-1} + R.(1+i)^n$$

Com R em evidência teremos:

$$S = R . [(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Como sabemos o número um é o elemento neutro na multiplicação, então se multiplicarmos o segundo membro por $(1+i) / (1+i)$, a igualdade não se altera, pois, tudo que é dividido por si mesmo é sempre um. Logo teremos:

$$S = R . \frac{(1+i)}{(1+i)} . [(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n]$$

Então teremos: $S = R . (1+i) . [1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n]$

Igualando todo o somatório que está entre colchetes a $S_{\overline{n}|i}$ teremos:

$$S_{\overline{n}|i} = [1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n]$$

Logo o nosso montante será dado por:

$$S = R . (1+i) . S_{\overline{n}|i} \quad \text{lê-se : "S, n cantoneira i"}$$

Geralmente em concursos o valor de "S, n cantoneira i" é dado em uma tabela.

Exemplo: Uma pessoa deposita R\$ 100,00 todo início de mês em um banco. Sabendo-se que ela começou os depósitos em janeiro, e está ganhando 3% am, e que o último depósito foi em novembro quanto possuirá no final do ano ?

Resolução: $S = R . (1+i) . S_{\overline{n}|i}$

Como foram feitos 11 depósitos $n = 11$, a taxa $i = 3\%$, logo $S_{\overline{n}|i} = 12,807796$

$$S = 100 . (1 + 0,03) . 12,807796 \rightarrow 100 . 1,03 . 12,807796 \rightarrow \mathbf{1319,20}$$

Problemas Propostos

- 1) Um bem foi adquirido através de um plano de 5 prestações de R\$ 500,00 mensais iguais e consecutivas. A 1ª prestação ocorre na data de sua aquisição. A taxa negociada é de 3% a.m. e o regime é de capitalização composta. O valor à vista do bem é de ?

(R = R\$ 2.358,55)

- 2) Um financiamento foi adquirido através de um plano de 10 prestações de R\$ 1.000,00 anuais iguais e consecutivas. A 1ª prestação ocorre na data de sua aquisição. A taxa negociada é de 10% a.a. e o regime é de capitalização composta. O valor do financiamento desprezando os centavos é de ?

(R = R\$ 6.759,00)

- 3) Um automóvel no valor de R\$ 8.500,00 foi adquirido através de um plano de financiamento de 36 prestações mensais iguais e consecutivas. A 1ª prestação ocorre na data de sua aquisição. A taxa negociada é de 2% a.m. e o regime é de capitalização composta. O valor de cada prestação é de ?

(R = R\$ 326,94)

- 4) Uma pessoa deposita todo início de mês R\$ 200,00, em um banco que paga 1,5% a.m.,. Sabendo que o 1º depósito ocorreu no primeiro dia de janeiro, quanto ela possuirá no final de dezembro ?

(R = R\$ 2.647,36)

Questões de Concursos Públicos

Juros Simples

- 1) (Fiscal da Receita Federal). Indique, nas opções abaixo, qual a taxa unitária anual equivalente à taxa de juros simples de 5% ao mês.

a) 0,7 b) 0,4 c) **0,6** d) 0,8 e) 0,5

- 2) (TTN) Se $\frac{6}{8}$ de uma quantia produzem $\frac{3}{8}$ desta mesma quantia de juros simples em 4 anos, qual é a taxa aplicada ?

a) 70%aa b) 40%aa c) 20%aa d) 13,6%aa e) **12,5%aa**

- 3) (AFTN) – Os capitais de R\$ 20.000,00; R\$ 30.000,00 e R\$ 50.000,00 foram aplicados à mesma taxa de juros simples mensal durante 4, 3 e 2 meses respectivamente. O prazo médio de aplicação desses capitais é :
- a) 3m12d b) 4m20d c) 2m31d d) 2m15d **e) 2m21d**
- 4) (AFTN) – O desconto comercial simples de um título 4 meses antes do seu vencimento é de R\$ 600,00. Sendo uma taxa de 5%am, o valor correspondente no caso de um desconto racional simples é de ?
- a) 200,00 b) 300,00 c) 400,00 **d) 500,00** e) 250,00
- 5) (Folha dirigida) – Um investidor que aplicar R\$ 15.000,00 durante 8 meses a uma taxa mensal de 2% a juros simples receberá, em reais, juros de ?
- a) 2400,00** b) 2160,00 b) 2200,00 c) 2250,00 d) 3230,00 e) 3170,00
- 6) (Analista BACEN) – Na capitalização simples, a taxa que faz duplicar um capital em 2 meses vale?
- a) 40% b) 42,0% c) 54% d) 60% **e) 50%**
- 7) (Analista BACEN) – Na capitalização simples, os juros correspondentes à aplicação de R\$ 2.000,00 por 2 meses, à taxa de 4%am é de ?
- a) 140,00 **b) 160,00** b) 200,00 c) 250,00 d) 230,00 e) 170,00
- 8) (Analista BACEN) – O valor do desconto simples por fora, de um título de R\$ 2.000,00 com vencimento para 120 dias à taxa de 3%am é de?
- a) 269,00 b) 179,00 c) 230,00 d) 359,00 **e) 240,00**
- 9) (Fiscal da Receita Federal) O desconto comercial simples de um título quatro meses antes de seu vencimento é de R\$600,00. Considerando uma taxa de 5% ao mês, obtenha o valor correspondente no caso de um desconto racional simples.
- a) R\$ 740 b) R\$ 630 c) R\$ 535 d) R\$ 720 **e) R\$ 500**
- 10) (TTN) Um negociante tem duas dívidas a pagar, uma de R\$ 3000,00, com 45 dias de prazo e outra de R\$ 8400,00, pagável em 60 dias. O negociante quer substituir essas duas dívidas por uma única, com 30 dias de prazo. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 12%aa, e usando a data focal zero, o valor nominal dessa dívida será de:
- a) R\$ 11287,00 b) R\$ 8232,00 c) R\$ 9332,00 d) R\$ 11300,00 e) R\$ 8445,00

11) (AFC-ESAF) Determinar a taxa de juros mensal para que sejam equivalentes hoje os capitais de R\$ 1000,00 vencível em dois meses e R\$ 1500,00 vencível em três meses, considerando-se o desconto simples comercial.

a) 15% b) 20% c) 25% d) 30% e) 33,33%

12) (AFTN) João deve a um banco R\$ 190.000,00 que vencem daqui a 30 dias. Por não dispor de numerário suficiente, propõe a prorrogação da dívida por mais 90 dias. Admitindo-se a data focal atual zero e que o banco adote a taxa de desconto comercial simples de 72% aa, o valor do novo título será de:

a) R\$ 235000,00 b) R\$ 238000,00 c) R\$ 240000,00 d) R\$ 243000,00 e) R\$ 245000,00

Questões de Concursos Públicos

Juros Compostos

01) (BACEN) um capital de R\$ 4.000,00 aplicado à taxa de 2%am, durante 3 meses, na capitalização composta, gera um montante de:

a) 6.000,00 b) 4.240,00 c) 5.500,00 **d) 4.244,83** e) 6.240,00

02) (AFTN) Que quantia mínima devo aplicar hoje a juros compostos, à taxa anual de 20%, para que ao completar um período de 3 anos eu consiga, como montante, comprar um carro no valor de R\$10.800,00?

a) 6.00,00 **b) 6.250,00** c) 6.500,00 d) 6.750,00 e) 6.800,00

03) (AFTN) Uma empresa obteve um financiamento de R\$10.000,00, à taxa de 120%aa, capitalizados mensalmente (juros compostos). A empresa pagou R\$6.000,00 no final do primeiro mês e R\$3.000,00 no final do 2º mês. O valor que deverá ser pago no final do 3º mês para liquidar o financiamento (juros + principal) é:

a) 3.250,00 b) 3.100,00 c) 3.050,00 d) 2.975,00 **e) 2.750,00**

04) (AFTM/Fortaleza/CE) um capital aplicado a juros compostos, à taxa nominal de 36%aa, com capitalização mensal, atingiu um montante de R\$10.900,00 ao fim de um trimestre. O capital aplicado foi de (esquecendo os centavos):

a) 9.800,00 b) 9.889,00 c) 9.919,00 **d) 9.975,00** e) 10.000,00

05) (auditor TCE/PB) O capital de R\$ 120,00 foi colocado a juros compostos de 20%aa, capitalizado semestralmente. Ao final de 1 ano e 6 meses, o montante era de :

- a) 169,00 b) 179,00 c) 130,00 **d) 159,72** e) 165,00

06) (Fiscal do município de SP) No regime de capitalização composta, à taxa mensal de 10%, um título de valor nominal de R\$ 2.541,00, é resgatado 2 meses antes do vencimento. O desconto racional será de:

- a) **441,00** b) 541,00 c) 640,00 d) 444,00 e) 349,00

07) (Fiscal do município de SP) Um título de valor nominal de R\$ 59.895,00 foi pago três meses antes do vencimento. Se a taxa do desconto racional composto era de 10%, o valor líquido deste título era de?

- a) 40.00,00; **b) 45.000,00;** c) 50.000,00; d) 55.000,00; e) 60.000,00

08) (Fiscal do município de SP) Uma empresa tem dois títulos: um de valor nominal R\$ 6.000,00 com vencimento em 1 ano e outro de valor nominal R\$ 7.200,00 com vencimento em 1 ano e meio. Ele os trocou por uma nota promissória com vencimento para seis meses. Se a taxa de juros compostos é de 44%aa, o valor da nota promissória em seu vencimento será de ?

- a) **10.000,00;** b) 15.000,00; c) 20.000,00; d) 25.000,00; e) 30.000,00

09) (Fiscal do município de SP) No regime de capitalização composta, qual a taxa anual de juros para a qual um título de valor nominal R\$ 5.000,00 vencível daqui a 1 ano, equivale a um título de valor nominal R\$ 5.750,00, vencível daqui a 2 anos?

- a) 10%; **b) 15%;** c) 20%; d) 25%; e) 30%

10) (Fiscal do município de SP) Um aparelho de som é vendido à vista por R\$ 1.275,00, ou a prazo, sem entrada e em duas parcelas bimestrais iguais. Se a taxa bimestral de juros compostos for de 4%, o valor de cada parcela será de?

- a) 430,00; b) 538,00; **c) 676,00;** d) 715,00; e) 802,00

11) (AFTN) – Uma compra no valor de R\$ 10.000,00 deve ser paga com uma entrada de 20% e o saldo devedor financiado em 12 prestações mensais iguais, vencendo a 1ª prestação ao fim do 1º mês, a uma taxa de 4%am. Considerando que este sistema de amortização corresponde a uma anuidade ou renda certa, em que o valor atual da anuidade corresponde ao saldo devedor e que os termos de anuidade correspondem às prestações, calcule a prestação mensal, desprezando os centavos.

- a) 430,00; b) 538,00; c) 748,00; **d) 852,00;** e) 905,00

Questões de Concursos Públicos

Desconto Racional ou Desconto “por dentro” (Juros Simples)

01) Uma pessoa pretende saldar um título de R\$ 5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., o desconto racional simples e o valor racional simples que essa pessoa vai obter, é igual a:

- a) **R\$ 500,00 e R\$ 5.000,00**
- b) R\$ 500,00 e R\$ 5.500,00
- c) R\$ 450,00 e R\$ 5.000,00
- d) R\$ 600,00 e R\$ 5.000,00
- e) R\$ 300,00 e R\$ 5.500,00

02) Um título com valor nominal de R\$ 110.000,00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um desconto racional simples à taxa de 60% ao mês. Nessas condições, o valor atual racional do título é de:

- a) R\$ 22.000,00
- b) R\$ 30.000,00
- c) R\$ 40.000,00
- d) R\$ 45.000,00
- e) **R\$ 50.000,00**

3) Um título com valor nominal de R\$ 3.836,00 foi resgatado quatro meses antes do seu vencimento, tendo sido concedido um desconto racional simples à taxa de 10% ao mês. Nessas condições, o valor pago pelo título foi de:

- a) R\$ 2.301,60
- b) R\$ 2.500,00
- c) R\$ 2.700,00
- d) **R\$ 2.740,00**
- e) R\$ 3.452,40

04) Um título com valor nominal de R\$ 7.420,00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, sendo-lhe por isso concedido um desconto racional simples à taxa de 20% ao mês. Nessas condições, o valor pago pelo título foi de:

- a) R\$ 4.452,00
- b) R\$ 4.500,00
- c) R\$ 5.000,00
- d) **R\$ 5.300,00**
- e) R\$ 5.936,00

05) Uma pessoa pretende saldar uma dívida cujo valor nominal é de R\$ 2.040,00, quatro meses antes de seu vencimento. Qual o valor, em reais, que deverá pagar pelo título, se a taxa racional simples usada no mercado é de 5% ao mês?

- a) R\$ 1.200,00
- b) R\$ 1.350,00
- c) R\$ 1.632,00
- d) R\$ 1.700,00**
- e) R\$ 1.750,00

06) Calcular o desconto racional simples (por dentro) sofrido por uma letra de R\$ 8.320,00, descontada à taxa de 6% ao ano, 8% meses antes do seu vencimento. **Resposta: R\$ 320,00**

07) Qual o prazo de antecipação de um título que descontado racionalmente, à taxa de juros de 8% ao mês, produziu um desconto racional simples equivalente a $\frac{1}{6}$ do seu valor nominal? **Resposta: 2 meses e 15 dias**

08) O valor atual racional de um título é igual a $\frac{4}{5}$ de seu valor nominal. Calcular a taxa anual de desconto racional simples, sabendo-se que o pagamento desse título foi antecipado de 6 meses. Resposta: 50%

09) Aceitei um título vencível a 1 ano, 1 mês e 10 dias. Tendo sido descontado por dentro a 9% ao ano., deu R\$ 1.000,00 de desconto racional simples. Qual era o valor nominal do título? Resposta: R\$ 11.000,00

Problema 10. O valor atual racional de um título é igual a $\frac{1}{2}$ de seu valor nominal. Calcular a taxa de desconto racional simples, sabendo-se que o pagamento desse título foi antecipado de 5 meses.

- a) 200% a.a.
- b) 20% a.m.**
- c) 25% a.m.
- d) 28% a.m.
- e) 220% a.a.

Questões de Concursos Públicos

Desconto Comercial ou Desconto “por fora” (Juros Simples)

01) Uma pessoa pretende saldar um título de R\$ 5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., o desconto comercial simples e o valor atual comercial simples que essa pessoa vai obter, é igual a:

- a) R\$ 500,00 e R\$ 5.000,00
- b) R\$ 550,00 e R\$ 4.950,00**
- c) R\$ 450,00 e R\$ 5.000,00
- d) R\$ 600,00 e R\$ 5.000,00
- e) R\$ 300,00 e R\$ 5.500,00

Solução:

$$V_c = N(1 - in)$$

$$V_c = 5.500,00 \times \left(1 - \frac{0,40}{12} \times 3\right)$$

$$V_c = 5.500,00 \times 0,9$$

$$V_c = \$4950,00$$

02) A que taxa anual um título de R\$ 2.000,00, em 6 meses, dá R\$ 400,00 de desconto simples por fora? **Resposta: 40% ao ano.**

03). Descontado por fora, à taxa de 4% ao mês, três meses antes do vencimento, um título sofreu um desconto simples de R\$ 24.000,00. Qual era o valor nominal desse título? **Resposta: R\$ 200.000,00**

04). Uma nota promissória de R\$ 1.800,00 tem valor líquido de R\$ 1.200,00 quando descontada por fora três meses antes do seu vencimento. Qual é a taxa mensal do desconto comercial simples? **Resposta: 11,11% ao mês**

05). Um título de R\$ 8.400,00 produziu um desconto, por fora, de R\$ 105,00 quando descontada um mês e meio antes do seu vencimento. Qual é a taxa anual do desconto comercial simples? **Resposta: 10% ao ano**

06). Um título com valor nominal de R\$ 2.400,00 é descontado por fora a uma taxa de 4,5% ao mês, com antecedência de 6 meses. Qual é o valor do desconto comercial simples. **Resposta: R\$ 648,00**

07). Uma nota promissória foi descontada, por fora, três meses e dez dias antes do seu vencimento, à taxa de 10% ao mês, produzindo um desconto simples de R\$ 400,00. Qual era o valor de face da promissória? **Resposta: R\$ 1.200,00**

08). Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 (quinhentos mil reais) foi descontado 60 dias, antes do seu vencimento, à taxa simples de desconto de 10% ao mês. Qual o valor líquido do título? **Resposta: R\$ 400.000,00**

09). Qual é o valor da diferença entre os descontos simples por dentro e por fora de uma nota promissória de R\$ 1.120,00 se ela for descontada 40 dias antes do seu vencimento a uma taxa de 9% ao mês? **Resposta: R\$ 14,40**

10) A diferença entre os descontos simples comercial e racional incidentes sobre um mesmo título é de R\$ 3,00. Sabendo que ambos foram calculados à taxa de 15% ao ano e 4 meses antes do vencimento, qual o valor nominal deste título? **Resposta: R\$ 1.260,00**

Questões de Concursos Públicos

Desconto Bancário (Juros Simples)

01) Qual é o valor do desconto bancário simples sofrido por uma nota promissória de R\$ 1.000,00, à taxa de 8% ao mês, 3 meses antes do seu vencimento? **Resposta: R\$ 240,00**

Questões de Concursos Públicos

Relação entre o Desconto Comercial e o Desconto Racional (Juros Simples)

01) O desconto comercial de um título descontado 3 meses antes de seu vencimento e à taxa de 40% a.a. é de \$ 550,00. Qual é o desconto racional simples?

Solução: Aplicando diretamente a fórmula, temos:

$$D_c = D_r(1 + in)$$

$$550,00 = D_r\left(1 + \frac{0,40}{12} \times 3\right)$$

$$550,00 = D_r(1 + 0,10)$$

$$D_r = \frac{550,00}{1,10} = \$500,00$$

Questões de Concursos Públicos

Descontos Simples

01) Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 84% ao ano e o desconto comercial simples. O valor do desconto foi de R\$ 10.164,00. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em R\$ 1.764,00. Nessas condições, o valor nominal da duplicata é de:

- a) R\$ 45.000,00
- b) R\$ 46.700,00
- c) R\$ 47.300,00
- d) R\$ 48.400,00**
- e) R\$ 50.000,00

02) O valor atual racional de um título é igual a $\frac{1}{2}$ de seu valor nominal. Calcular a taxa de desconto simples, sabendo-se que o pagamento desse título foi antecipado de 5 meses.

- a) 200% ao ano.
- b) 20% ao mês.**
- c) 25% ao mês.
- d) 28% ao mês.
- e) 220% ao ano.

03) Utilizando o desconto racional simples, o valor que devo pagar por um título com vencimento daqui a 6 meses, se o seu valor nominal for de R\$ 29.500,00 e eu desejo ganhar 36% ao ano, é de:

- a) R\$ 24.000,00
- b) R\$ 25.000,00**
- c) R\$ 27.500,00
- d) R\$ 18.880,00
- e) R\$ 24.190,00

04) Admita-se que uma duplicata tenha sido submetida a 2 tipos de descontos. No primeiro caso, a juros simples, a uma taxa de 10% ao ano, vencível em 180 dias, com desconto comercial (por fora). No segundo caso, com desconto racional (por dentro), mantendo as demais condições. Sabendo-se que a soma dos descontos, por fora e por dentro, foi de R\$ 635,00, o valor nominal do título era de R\$:

- a) **R\$ 6.510,00**
- b) R\$ 6.430,00
- c) R\$ 6.590,00
- d) R\$ 5.970,00
- e) R\$ 6.240,00

05) José descontou 2 duplicatas em um banco, no regime de juros simples comerciais, a uma taxa de juros de 15% ao ano. O primeiro título vencia em 270 dias e o segundo em 160 dias, sendo que o último era de valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo-se que os dois descontos somaram o valor de R\$ 382,50, o título que produziu o maior desconto tinha valor nominal, em R\$, de:

- a) R\$ 1.850,00
- b) R\$ 1.750,00
- c) **R\$ 1.800,00**
- d) R\$ 1.700,00
- e) R\$ 1.900,00

06) Você possui uma duplicata cujo valor de face é R\$ 150,00. Essa duplicata vence em 3 meses. O banco com o qual você normalmente opera, além da taxa normal de desconto mensal (simples por fora), também fará uma retenção de 15% do valor de face da duplicata a título de saldo médio, permanecendo bloqueado em sua conta este valor desde a data do desconto até a data do vencimento da duplicata. Caso você desconte a duplicata no banco você receberá líquidos, hoje, R\$ 105,00. A taxa de desconto que mais se aproxima da taxa praticada por este banco é:

- a) **5,0%**
- b) 5,2%
- c) 4,6%
- d) 4,8%
- e) 5,4%

Questões de Concursos Públicos

Equivalência de Capitais a Juros Simples

01) Um negociante tem duas dívidas a pagar, uma de R\$ 3.000,00, com 45 dias de prazo e outra de R\$ 8.400,00, pagável em 60 dias. O negociante quer substituir essas duas dívidas por uma única, com 30 dias de prazo. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 12% ao ano e usando a data zero, o valor nominal dessa dívida será de:

- a) R\$ 11.287,00
- b) R\$ 8.232,00
- c) R\$ 9.332,00
- d) **R\$ 11.300,00**
- e) R\$ 8.445,00

02) Determinar a taxa mensal para que sejam equivalentes hoje os capitais de R\$ 1.000,00 vencível em dois meses e R\$ 1.500,00 vencível em três meses, considerando-se o desconto simples comercial.

- a) 15%
- b) **20%**
- c) 25%
- d) 30%
- e) 33,33%

03) João deve a um banco R\$ 190.000,00 que vencem daqui a 30 dias. Por não dispor de numerário suficiente, propõe a prorrogação da dívida por mais 90 dias. Admitindo-se a data atual (zero) e que o banco adote a taxa de desconto comercial de 72% ao ano, o valor do novo título será de:

- a) **R\$ 235.000,00**
- b) R\$ 238.000,00
- c) R\$ 240.000,00
- d) R\$ 243.000,00
- e) R\$ 245.000,00

04) Para refinanciar uma dívida de R\$ 1.500.000,00 em 36 dias, o devedor pagar R\$ 148.000,00 e é emitido um novo título no valor de R\$ 1.400.000,00 para o prazo de 90 dias. A taxa de desconto comercial adotada na operação foi de:

Obs.: 1) Considere a data de referência o instante zero. 2) Taxa de juros simples.

- a) 25% ao ano.
- b) 26% ao ano.
- c) 20% ao ano.
- d) 30% ao ano.
- e) **24% ao ano.**

Questões de Concursos Públicos

Desconto Racional Composto

01) Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto, que foi calculado com base na taxa de 20% ao mês. Sendo R\$ 31.104,00 o valor nominal do título, quanto paguei por ele?

- a) **R\$ 21.600,00**
- b) R\$ 21.700,00
- c) R\$ 21.800,00
- d) R\$ 21.900,00
- e) R\$ 30.000,00

02) Uma empresa tomou emprestada de um banco, por 6 meses, a quantia de R\$ 1.000.000,00 à taxa de juros compostos de 19,9% ao mês. No entanto, um (1) mês antes do vencimento a empresa decidiu liquidar a dívida. Qual o valor a ser pago, se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 10% ao mês? Considere $1,199^6 = 2,97$.

- a) R\$ 2.400.000,00
- b) R\$ 2.500.000,00
- c) R\$ 2.600.000,00
- d) **R\$ 2.700.000,00**
- e) R\$ 2.800.000,00

03) Um *comercial paper* com valor de face de R\$ 1.000.000,00 e vencimento daqui a três anos deve ser resgatado hoje a uma taxa de juros compostos de 10% ao ano, e considerando o desconto racional, obtenha o valor do resgate.

- a) **R\$ 751.314,80**
- b) R\$ 750.000,00
- c) R\$ 748.573,00
- d) R\$ 729.000,00
- e) R\$ 700.000,00

Questões de Concursos Públicos

Desconto Comercial Composto

01) Um título de R\$ 5.000,00 será descontado 2 meses antes do vencimento pelo critério de desconto comercial à taxa de 60% ao ano com capitalização mensal. O valor do desconto será de:

- a) **R\$ 487,50**
- b) R\$ 464,85
- c) R\$ 512,50
- d) R\$ 4.512,50
- e) R\$ 4.535,15

02) Uma duplicata de R\$ 3.000,00 deverá ser descontada 3 anos antes do seu vencimento a uma taxa de 25% ao ano pelo critério do desconto racional composto. Qual seria a taxa anual a ser adotada para obter-se um desconto igual pelo critério de desconto comercial composto?

- a) 33,3% ao ano.
- b) 28% ao ano.
- c) 25% ao ano.
- d) 20% ao ano.**
- e) 18% ao ano.

03) Uma duplicata, no valor de R\$ 2.000,00, é resgatada dois meses antes do vencimento, obedecendo ao critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao mês, o valor descontado e o valor do desconto são, respectivamente, de:

- a) R\$ 1.600,00 e R\$ 400,00
- b) R\$ 1.620,00 e R\$ 380,00**
- c) R\$ 1.640,00 e R\$ 360,00
- d) R\$ 1.653,00 e R\$ 360,00
- e) R\$ 1.666,67 e R\$ 333,33

Questões de Concursos Públicos

Equivalência Composta de Capitais

01) João tem um compromisso representado por 2 (duas) promissória: uma de R\$ 200.000,00 e outra de R\$ 150.000,00, vencíveis em 4 (quatro) e 6 (seis) meses, respectivamente. Prevendo que não disporá desses valores nas datas estipuladas, solicita ao banco credor a substituição dos dois títulos por um único a vencer em 10 (dez) meses. Sabendo-se que o banco adota juros compostos de 5% ao mês, o valor da nova nota promissória é de (desprezar os centavos no resultado final)

Dados:

$$(1,05)^4 = 1,21550625$$

$$(1,05)^6 = 1,340095641$$

$$(1,05)^{10} = 1,628894627$$

- a) R\$ 420.829,00
- b) R\$ 430.750,00
- c) R\$ 445.723,00
- d) R\$ 450.345,00**
- e) R\$ 456.703,00

02) Tomei emprestados R\$ 1.000.000,00 a juros compostos de 10% ao mês. Um mês após o empréstimo, paguei R\$ 500.000,00 e, dois meses após esse pagamento, liquidei a dívida. O valor desse último pagamento foi de:

- a) R\$ 660.000,00
- b) R\$ 665.500,00
- c) R\$ 700.000,00
- d) R\$ 726.000,00**
- e) R\$ 831.000,00

03) Tomar um empréstimo por dois meses, assinando uma promissória com vencimento em dois meses e sendo feito o desconto da mesma por um banco à taxa de desconto bancário (desconto simples por fora) de 10% ao mês, equivale a pagar juros compostos de taxa bimestral de:

- a) 20%
- b) 22%
- c) 25%**
- d) 28%
- e) 30%

Questões de Concursos Públicos

Rendas Certas

01) O preço de um automóvel é de R\$ 500.000,00. Um comprador ofereceu R\$ 200.000,00 de entrada e o pagamento do saldo restante em 12 prestações iguais, mensais. A taxa de juros compostos é de R\$ 5% ao mês. O valor de cada prestação, desprezando os centavos é de:

$$\text{Dado: } (1,05)^{12} = 1,795856326$$

- a) R\$ 36.847,00
- b) R\$ 25.847,00
- c) R\$ 31.847,00
- d) R\$ 33.847,00**
- e) R\$ 30.847,00

02) Um empréstimo de R\$ 20.900,00 foi realizado com uma taxa de juros de 36% ao ano, capitalizados trimestralmente, e deverá ser liquidado através do pagamento de duas (2) prestações trimestrais, iguais e consecutivas (primeiro vencimento ao final do primeiro trimestre, segundo vencimento ao final do segundo trimestre). O valor que mais se aproxima do valor unitário de cada prestação é:

- a) R\$ 10.350,00
- b) R\$ 10.800,00
- c) R\$ 11.881,00**
- d) R\$ 12.433,33
- e) R\$ 12.600,00

03) Uma pessoa paga uma entrada no valor de R\$ 23,60 na compra de um equipamento e paga mais 4 prestações mensais, iguais e sucessivas, no valor de R\$ 14,64 cada uma. A instituição financiadora cobra uma taxa de juros de 120% ao ano, capitalizados mensalmente (juros compostos). Com base nestas informações podemos afirmar que o valor que mais se aproxima do valor à vista do equipamento adquirido é igual a:

- a) **R\$ 70,00**
- b) R\$ 76,83
- c) R\$ 86,42
- d) R\$ 88,00
- e) R\$ 95,23

04) Uma pessoa obteve um empréstimo de R\$ 120.000,00, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, que deverá ser pago em 10 parcelas iguais. O valor dos juros a ser pago na 8ª parcela é de:

- a) R\$ 5,00
- b) R\$ 51,00
- c) R\$ 518,00
- d) R\$ 5,187,00
- e) **R\$ 770,00**

Questões de Concursos Públicos

AFTE/RO

01) Uma pessoa adquiriu um veículo financiado com uma entrada de R\$ 5.000,00 em 12 prestações mensais sucessivas de R\$ 1.506,93 cada uma, calculada a juros compostos de 3% ao mês. No momento da oitava prestação, a pessoa resolveu quitar toda a dívida. O valor financiado do veículo e o total pago para a quitação da dívida foram, respectivamente:

- a) R\$ 15.000 e R\$ 7.434,65
- b) **R\$ 15.000 e R\$ 7.108,34**
- c) R\$ 18.083,18 e R\$ 7.108,34
- d) R\$ 18.083,18 E R\$ 7.534,65
- e) R\$ 23.083,18 E R\$ 7.534,65

Comentários e Solução:

1.....a.....12

1.506,93

Agora temos este cenário

8_____9_____10_____11_____12

1.506,93 idem idem idem idem

Agora temos que calcular o valor atual das prestações para data focal 8.

$$VA = 1.506,93 + 1.506,93 \times 1 - (1 + 0,03)^{-4} / 0,03$$

$$VA = 1.506,93 + 1.506,93 \times 1 - (1,03)^{-4} / 0,03$$

$$VA = 1.506,93 + 1.506,93 \times 1 - 0,888487047 / 0,03$$

$$VA = 1.506,93 + 1.506,93 \times 0,111512952 / 0,03$$

$$VA = 1.506,93 + 1.506,93 \times 3,717098403$$

$$VA = 1.506,93 + 5.601,407096$$

$$VA = 7.018,337096$$

$$\text{Valor Financiando} = 1.506,93 \times 1 - (1 + 0,03)^{-12} / 0,03$$

$$\text{Valor Financiando} = 1.506,93 \times 1 - (1,03)^{-12} / 0,03$$

$$\text{Valor Financiando} = 1.506,93 \times 1 - 0,70137988 / 0,03$$

$$\text{Valor Financiando} = 1.506,93 \times 0,298620119 / 0,03$$

$$\text{Valor Financiando} = 1.506,93 \times 9,954003967$$

$$\text{Valor Financiando} = \text{R\$ } 15.000,00$$

02) Uma pessoa aplicou R\$ 10.000,00 pelo prazo fixo de 2 meses, a uma taxa de juros pré-fixada de 1,520% ao mês. No momento do resgate, verificou que a taxa de inflação média, para todo o período de sua aplicação, foi de 0,850%. O valor de resgate da aplicação e a taxa real de juros conseguida para o período da aplicação em questão foi de:

a) R\$ 10.304,00 e 2,190%

b) R\$ 10.334,00 e 2,194%

c) R\$ 10.304,00 e 2,213%

d) R\$ 10.306,31 e 2,190%

e) R\$ 10.306,31 e 2,194%

Comentários e Solução:

$$M = C \times (1 + i)^n$$

$$M = 10.000 \times (1 + 0,0152)^2$$

$$M = 10.000 \times (1,0152)^2$$

$$M = 10.000 \times 1,03063104$$

$$M = \text{R\$ } 10.306,3104$$

$$\text{Taxa real} = [(1 + i) / (1 + e) - 1] \times 100$$

i = Taxa bruta

e = Taxa de inflação.

Agora encontre a taxa equivalente bimestral:

$$\text{Taxa Equivalente} = [(1 + 0,0152)^2 - 1] \times 100$$

$$\text{Taxa Equivalente} = 3,063104 \% \text{ a.b}$$

Agora encontre a taxa real bimestral:

$$\text{Taxa Real} = [(1 + 0,03063104) / (1 + 0,0085) - 1] \times 100$$

$$\text{Taxa Real} = 2,1944511 \% \text{ a.b}$$

LETRA E